La Salle Virgen del Mar Almería	Ejercicios de representación de funciones y aplicación de la derivada Selectividad CCSS	Departamento de Ciencias Experimentales. Área de Matemáticas Versión 1.0

Representación de funciones

1) Sea la función $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$
Calcule:
a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sol: La función es creciente en (0,4) y decreciente en $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$.
b) Las coordenadas de sus extremos relativos. Tiene un máximo en (4, 32/3) un mínimo en (0,0).
c) El punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.**Sol:(2,16/3)**

2) Dada la función $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$, determine:
a) La monotonía y la curvatura de f .
b) Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos. Sol: **Máximo(0,4) Mínimo(2,0)**
c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = −1.
Sol: y= 9x+9

3) La función derivada de una función f viene dada por $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
a) (1.5 puntos) Obtenga los intervalos de monotonía de la función f y los valores de “x” en los que dicha función alcanza sus extremos locales. **Sol: Crece en (-∞,1) U (3,+∞) Decrece (3,+∞)**
b) (0.75 puntos) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de la función f.
Sol: es cóncava (∩) en (-∞,2). convexa (∪) en (2,∞).
c) (0.75 puntos) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 5), calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto. **Sol: y – 5 = (-3)(x-2)**

4) Sea la función $f(x) = x^3 - 1$.
a) (1 punto) Calcule los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese. S**ol: OY, (0,-1), OX, (1,0). f(x) es estrictamente creciente en R y no tiene ni máximos ni mínimos relativos en todo R.**
b) (1 punto) Determine su curvatura y punto de inflexión. Sol: **es cóncava (∩) en (-∞,0). Es convexa (∪) en (0,∞).Punto inflexión (0,-1)**
c) (1 punto) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.
Sol: Los puntos pedidos son (3,28) y (-3, -30).

5) Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$
a) Determine los extremos relativos de f ; estudie la monotonía y la curvatura.**Sol**: **Máximo (2,20) mínimo (4,16), Punto inflexión (3,18)**
b) Represente gráficamente la función f .

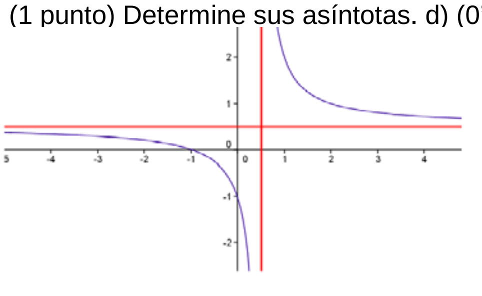
6) a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$
Sol:D(f)=R-{1/2} Asíntotas: x=-1/2, y=2, Corte(0,0).

7) Sea la función. $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$.
a) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (0,1).
Sol: y =x+1
b) (1 punto) Estudie la monotonía de f. **Sol: siempre creciente sin máximos ni mínimos**
c) (1 punto) Halle las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y represente gráficamente la función. **Sol: la recta “x = 1/2" es una A.V la recta “y = 1/2" es una A.H**.

8) Sea la función *f* definida mediante $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

a) (0’5 puntos) Determine los puntos de corte con los ejes. b) (1 punto) Estudie su curvatura. c) (1 punto) Determine sus asíntotas. d) (0’5 puntos) Represente la función.

Sol:



9) Se considera la función definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-8x+6 & si \quad x\le 1 \\ -2x^2+8x-6 & si \quad x>1 \end{cases}$

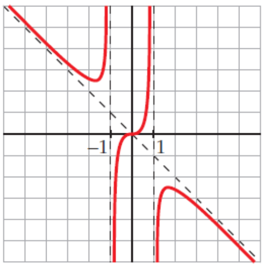
a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f .**Sol:Continua en todo R no derivable en R-{1}**
b) Represente la gráfica de f .
c) Indique los extremos relativos de la función. **Sol: Máximo en (2,2) , Punto anguloso en (1,0)** .

10) Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 1 \\ x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$

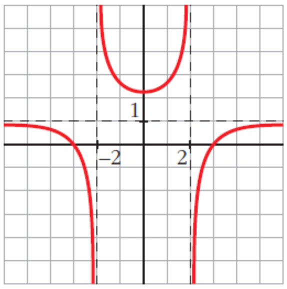
a) Estudie su continuidad y derivabilidad. **Sol: Continua en R Derivable R-{1}**
b) Determine la monotonía de f . Sol: **Decreciente: (−∞,0) Creciente (0,1)U(1, ∞)**
c) Represente gráficamente esta función.

11)
12) Representa

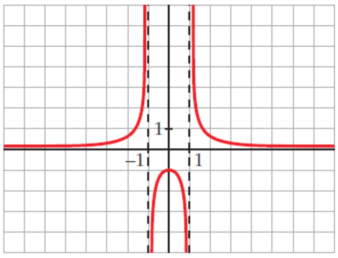
a) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$



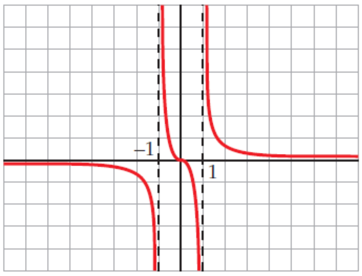
$y=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$



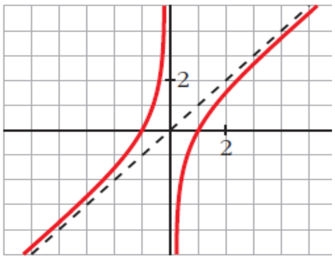
$y=\dfrac{1}{x^2-1}$



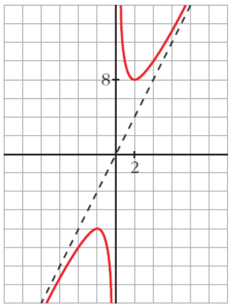
$y=\dfrac{x}{x^2-1}$



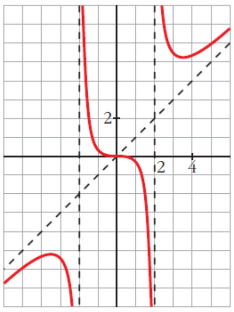
$y=\dfrac{x^2-1}{x}$



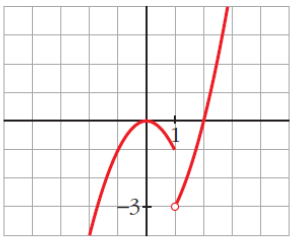
c) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$



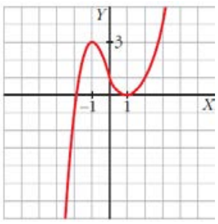
$y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$



$f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x\le 1 \\ x^2-4 & \text{si } x>1 \end{cases}$



$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+1 & \text{si } x<0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$



Parámetros

1) Sea la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$
a) Determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,3) y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x = -2$. ***Sol:* $a = 8$; $b = -7$.**
b) Tomando $a = 8$ y $b = -10$ deduzca la curvatura de su gráfica, el valor mínimo que alcanza la función y los valores donde la función se anula. **Sol: Convexa, mínimo (− 2,−18) . Sol: x=1, x=-5.**

2) a) (1'5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = 3/x en el punto de abscisa x = - 1 **Sol: y + 3 = -3(x + 1)**
b) (1'5 puntos) Halle los valores de a y b para que la función g(x) = ax + b/x tenga un extremo relativo en el punto (1,2). **Sol: a = 1 = b.**

3) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$
a) Determine el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f tiene un máximo en $x = 1$ y que $f(1) = 2$. Sol**: a=-3, b=-4.**
b) Para $a = b = 1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. Sol:**y=x.**

4) a) Sea la función definida para todo número real x por $f(x) = ax^3 + bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es − 3 .
Sol: a = − 2 ; b = 3
b) Si en la función anterior a=1/3 b=-4 determine sus intervalos de monotonía y sus extremos. Sol: Maximo (-2,16/3), Mínimo´(2,-16/3)

5) a) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1,−3) y tenga el punto de inflexión en x = −1 .**Sol;a=1, b=-2.**
b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ **Sol:Máx:(0,7) Min(2,3)**

6) Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en elpunto (1,5) sea la recta y = 3x + 2 . **Sol: a=3/2, b=-7/2**

7) Determine dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcule el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.**Sol: a=8**

8) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en x = 2 y un punto de inflexión en x = 3. Calcule los coeficientes a y b y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo. **Sol: a = −9 ; b = 24 Máximo relativo**

9) a) Sea la función definida para todo número real x por $f(x) = ax^3 + bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es − 3 .
Sol: a = − 2 ; b = 3
b) Si en la función anterior a= 1/3 y b = −4 , determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.
Sol: max(-2, 16/3) min (2,-16/3)

10) a) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1,−3) y tenga el punto de inflexión en x = −1 .**Sol:a=1, b=-2**
b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ **Sol: Máximo (0,7) mínimo (2,3)**

11) Se considera la función $f(x) = ax^2 - bx + 4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 10).**Sol: a=-6, b=-12**
12 Sea la función $g(x) = x^3 + ax^2 + b$. Calcule a y b sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto (2,5) . **Sol: a = −6 ; b = 21**

Aplicación práctica de las funciones

1) Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función:

$$B(t) = \begin{cases} at - t^2 & si \quad 0 \le t \le 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \le 10 \end{cases}$$

a) (0'75 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que B sea una función continua.**Sol:a=8**
b) (1 punto) Para a = 8 represente su gráfica e indique en qué periodos de tiempo la función crecerá o decrecerá. **Sol: crece en (0,4) ∪ (6,10), y decrece en (4,6).**
c) (0'75 puntos) Para a = 8 indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los 6 primeros años y a cuanto asciende su valor. **Sol: 4 años, 16 millones euros**

2) Las funciones $I(t) = -2t^2 + 51t$ y $G(t) = t^2 - 3t + 96$ con $0 \le t \le 8$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, t , transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.
a) ¿Para qué valores de t, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos? **Sol:** $t = 48$ *y* $t = 6$
b) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntela gráficamente. Sol: **$B(t) = -3t^2 + 54t - 9$**
c) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento ,los beneficios fueron máximos?. Calcule el valor de ese beneficio**. Sol: t=**9 años,**B= 147000 euros.**

3) En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión: $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo [0,6] .
a) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?.**Sol:x=6, x=2**
b) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?. **Sol: x = 10 mil euros.**
c) ¿Cuál es el beneficio si no invierte nada en publicidad?. ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio? **Sol: 6.000 €(x=0). X=8 mil euros.**

4) Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes.
La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t, que lleva abierto el consultorio es $N(t) = 4t - t^2$.
a) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?.**Sol:(2,4)**
b) Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes,**Sol:5** ¿a qué hora cerrará?. **Sol: 9**
c) Represente gráficamente $N(t) = 4t - t^2$, con $N(t) \ge 0$.

5) Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:
$C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25$ $0 \le t \le 25$ (t = años transcurridos desde el año 2000)
a) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?.Sol: **t=10(2010)**
b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?.**Sol:t=25.**
c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.
Sol: $y = 0'8x + 37'8$

6) Sea $$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & si \quad 0 \le x \le 6 \\ \dfrac{5x}{2} - 15 & si \quad 6 < x \le 10 \end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
a) Represente la función f .
b) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas. **Sol: 2000 e**
c) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?**Sol: 2000 y 6000 e**

d) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo? **20000 e.**

7) El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por:

$$B(t)=\begin{cases}-t^2+7t & si\ 0\le t\le 5\\ 10 & si\ 5\le t\le 8\end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.
a) Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.
b) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11’25 millones de euros **Sol: 2’5 años y a los 4’5 años.**

8) Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por lafunción: $B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (t indica el tiempo, en años, $0 \le t \le 5$)
a) Represente la evolución del beneficio esperado en función del tiempo.
b) En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?. t=2, t=5

9) Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra.
Sea f(x)= 2- 4/(x+1) , con x ≥ 0 , la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.
a) Represente la función f.
b) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?. **Sol: X=1euro**
c) ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿ Y las pérdidas?.**Sol:Si , No**

10) El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de pesetas produce una ganancia de f (x) millones de pts, siendo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si } 0\le x\le 5\\ \dfrac{5}{2x} & \text{si } x>5\end{cases}$$

a) Represente la función f (x) .
b) Halle la inversión que produce máxima ganancia.**Sol: 5**
c) Halle el valor de la inversión que produce ganancia nula. **Sol: 4**
d) Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente **Sol tiende a cero**

11) El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por la función: $f(t) = -4t^2 + 60t - 15$ $1 \le t \le 8$
a) ¿Cuál será el valor de las existencias para t = 2 ? ¿Y para t = 4 ?. **Sol:89.000,161000**
b) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En que instante se alcanza?. **Sol:7'5, 210.000**
c) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?**Sol: t = 5**

12) El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$, en función de la hora x, siendo $11 \le x \le 20$.
a) Halle los extremos relativos de esta función. **Sol: Máximo (12,296); mínimo (16,264)**
b) Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.
c) Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas. **Sol b) Crece de 11 a 12 y de16 a 20 c) Máximo = 424; mínimo = 264**

13) Sea x, en euros, el precio de venta del litro de aceite de oliva virgen extra. Sea $f(x)=2-\dfrac{4}{x+1}$, con $x\ge 0$ la función que representa el balance económico quincenal, en miles de euros, de una empresa agrícola.
a) Represente la función f.
b) ¿A partir de qué precio de venta del litro de aceite empieza esta empresa a tener beneficios?. **Sol:x=1euro**
c) ¿Están limitadas las ganancias quincenales de esta empresa? ¿ Y las pérdidas?.**Sol Si;No**