

**INTEGRAL INDEFINIDA**

**EJERCICIOS**

1. Calcular las siguientes integrales **potenciales**:

a)  $\int \frac{1}{x^2} dx$     b)  $\int \frac{x^5}{6} dx$     c)  $\int x^{2/3} dx$     d)  $\int \frac{1}{x^{2/3}} dx$     e)  $\int t^2 t^3 dt$     f)  $\int x x^{2/3} dx$

g)  $\int \frac{t^3}{t^2} dt$     h)  $\int \frac{x^{2/3}}{x^{1/3}} dx$     i)  $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx$     j)  $\int \sqrt[3]{x^2} dx$     k)  $\int (t^2)^3 dt$     l)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx$

m)  $\int \frac{x}{\sqrt{x}} dx$     n)  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x} dx$     o)  $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} dx$     p)  $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$

(Soluc: a)  $-1/x$     b)  $x^6/36$     c)  $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$     d)  $3\sqrt[3]{x}$     e)  $t^6/6$     f)  $\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$     g)  $t^2/2$     h)  $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}$   
i)  $\frac{6\sqrt[6]{x^{11}}}{11}$     j)  $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$     k)  $t^7/7$     l)  $2\sqrt{x}$     m)  $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$     n)  $3\sqrt[3]{x}$     o)  $\frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}$     p)  $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 4\sqrt{x}$ )

2. Calcular las siguientes integrales de **funciones compuestas**:

a)  $\int (x+1)^2 dx$     b)  $\int (7x+5)^2 dx$     c)  $\int 2x(x^2+1) dx$     d)  $\int 3x^2(x^3+1) dx$     e)  $\int t(t^2+3) dt$

f)  $\int x^2(x^3+2) dx$     g)  $\int (2x+1)^{-3} dx$     h)  $\int x^2(x^3+1)^{-7} dx$     i)  $\int \frac{1}{(2x+1)^2} dx$     j)  $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

k)  $\int \frac{1}{t^2+2t+1} dt$     l)  $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+3x+1}$     m)  $\int x\sqrt{1+x^2} dx$     n)  $\int x\sqrt{1-x^2} dx$     o)  $\int (x+1)(x^2+2x+5)^6 dx$

p)  $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^4} dx$     q)  $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$     r)  $\int (16x+1)(8x^2+x-5) dx$     s)  $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} dx$     t)  $\int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} dx$

u)  $\int \cos x \sin x dx$     u)  $\int \cos x \sin^2 x dx$     v)  $\int \sin x \cos^2 x dx$     w)  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$     x)  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

y)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$     z)  $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$     α)  $\int \frac{\ln x}{x} dx$     β)  $\int \frac{\arcsen^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$     γ)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x}$

δ) (\*)  $\int \frac{\operatorname{arctg} x/2}{4+x^2} dx$

(Soluc: a)  $(x+1)^3/3$     b)  $(7x+5)^3/21$     c)  $(x^2+1)^2/2$     d)  $(x^3+1)^2/2$     e)  $(t^2+3)^2/4$     f)  $(x^3+2)^2/6$

g)  $\frac{-1}{4(2x+1)^2}$     h)  $\frac{-1}{18(x^3+1)^6}$     i)  $\frac{-1}{2(2x+1)}$     j)  $\frac{-1}{x^2+x+1}$     k)  $\frac{-1}{t+1}$     l)  $\frac{-1}{2(x+1)^2}$

m)  $\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}$     n)  $-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}$     o)  $(x^2+2x+5)^7/14$     p)  $\frac{-1}{9(x^3+1)^3}$     q)  $\frac{2\sqrt{3x+1}}{3}$     r)  $(8x^2+x-5)^2/2$

s)  $2\sqrt{x+1}$     t)  $\sqrt{x^2+1}$     u)  $\sin^2 x/2$  o  $-\cos^2 x/2$     v)  $\sin^3 x/3$     w)  $-\cos^3 x/3$     x)  $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}$

y)  $-\operatorname{cosec} x$     z)  $\ln^3 x/3$     α)  $-1/\ln x$     β)  $\ln^2 x/2$     γ)  $\frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen}^3 x}{3}$     δ)  $\frac{-1}{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}$

ε)  $\frac{\operatorname{arctg}^2 x/2}{4}$ )

3. Calcular las siguientes integrales de **tipo logarítmico**:

a)  $\int 4x^{-1} dx$       b)  $\int \frac{1}{x-1} dx$       c)  $\int \frac{1}{3x+5} dx$       d)  $\int \frac{1}{ax+b} dx$       e)  $\int \frac{x^2}{x^3+2} dx$   
 f)  $\int \frac{2x^2}{6x^3+1} dx$       g)  $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$       h)  $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx$       i)  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$       j)  $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$   
 k)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$       l)  $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$       m)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x} dx$       n)  $\int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg} x} dx$       o)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x}} dx$

(Soluc: a)  $\ln x^4$       b)  $\ln(x-1)$       c)  $\ln \sqrt[3]{3x+5}$       d)  $\frac{\ln(ax+b)}{a}$       e)  $\ln \sqrt[3]{x^3+2}$       f)  $\ln \sqrt[3]{6x^3+1}$   
 g)  $\ln(x^2+x+1)$       h)  $\ln \sqrt[6]{3x^2-6x+5}$       i)  $\ln(1+e^x)$       j)  $\ln \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$       k)  $\ln(\ln x)$   
 l)  $\ln(\operatorname{arctg} x)$       m)  $\ln(\operatorname{arcsen} x)$       n)  $\ln(1+\operatorname{tg} x)$       o)  $\ln \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}$ )

4. Calcular las siguientes integrales de **tipo exponencial**:

a)  $\int e^{-x} dx$       b)  $\int e^{2x} dx$       c)  $\int e^{-2x} dx$       d)  $\int e^{2x+1} dx$       e)  $\int e^{-2x+1} dx$   
 f)  $\int x e^{x^2-22} dx$       g)  $\int x e^{-x^2} dx$       h)  $\int x^2 e^{x^3+1} dx$       i)  $\int (2x+1)e^{x^2+x-1} dx$       j)  $\int \cos x e^{\operatorname{sen} x} dx$   
 k)  $\int \frac{1}{x} e^{\ln x} dx$       l)  $\int \sec^2 x \cdot e^{\operatorname{tg} x} \cdot dx$       m)  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$       n)  $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$       o)  $\int 12^x dx$   
 p)  $\int (6^x)^2 dx$       q)  $\int \frac{7^x}{5^x} dx$       r)  $\int 5^x 9^x dx$

(Soluc: a)  $-1/e^x$       b)  $e^{2x}/2$       c)  $\frac{-1}{2e^{2x}}$       d)  $e^{2x+1}/2$       e)  $-e^{-2x+1}/2$       f)  $\frac{e^{x^2-22}}{2}$       g)  $-\frac{1}{2e^{x^2}}$   
 h)  $\frac{e^{x^3+1}}{3}$       i)  $e^{x^2+x-1}$       j)  $e^{\operatorname{sen} x}$       k)  $x$       l)  $e^{\operatorname{tg} x}$       m)  $e^{\operatorname{arctg} x}$       n)  $e^{\operatorname{arcsen} x}$   
 o)  $12^x/\ln 12$       p)  $36^x/\ln 36$       q)  $\frac{(7/5)^x}{\ln 7/5}$       r)  $\frac{45^x}{\ln 45}$ )

5. Calcular las siguientes integrales **trigonométricas sencillas**:

a)  $\int \cos(-2x) dx$       b)  $\int \frac{1}{3} \operatorname{sen} x dx$       c)  $\int \cos \frac{x}{3} dx$       d)  $\int \operatorname{sen}(x+1) dx$       e)  $\int \cos(2x+5) dx$   
 f)  $\int \operatorname{sen}(-x+1) dx$       g)  $\int 3 \cos(2x+6) dx$       h)  $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$       i)  $\int 2x \cos(x^2+25) dx$       j)  $\int x \operatorname{sen}(3x^2+7) dx$   
 k)  $\int x \cos(-3x^2-5) dx$       l)  $\int 7x^2 \operatorname{sen}(4x^3+5) dx$       m)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$       n)  $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$       o)  $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$   
 p)  $\int \frac{\cos(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$

(Soluc: a)  $\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$       b)  $-\frac{\cos x}{3}$       c)  $3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}$       d)  $-\cos(x+1)$       e)  $\frac{\operatorname{sen}(2x+5)}{2}$       f)  $\cos(-x+1)$   
 g)  $\frac{3}{2} \operatorname{sen}(2x+6)$       h)  $-\frac{\cos x^2}{2}$       i)  $\operatorname{sen}(x^2+25)$       j)  $-\frac{\cos(3x^2+7)}{6}$       k)  $-\frac{\operatorname{sen}(-3x^2-5)}{6}$       l)  $-\frac{7 \cos(4x^3+25)}{12}$   
 m)  $\operatorname{sen} \sqrt{x}$       n)  $-2 \cos \sqrt{x}$       o)  $\operatorname{sen}(\ln x)$       p)  $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)$ )

6. Calcular las siguientes integrales por el método de sustitución o **cambio de variable**:

a)  $\int (x+2)^{10} x \, dx$  mediante  $x+2=t$       b)  $\int x \sqrt{x-1} \, dx$  haciendo  $t^2=x-1$       c)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$  con  $t=e^x$

d)  $\int \frac{x}{(x+1)^3} \, dx$  haciendo  $x+1=t$       e)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} \, dx$       f)  $\int \frac{(x+1)^{10}}{x} \, dx$

(Soluc: a)  $\frac{(x+2)^{12}}{12} - 2\frac{(x+2)^{11}}{11} + C$       b)  $2\left(\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3}\right) + C$       c)  $\arctg e^x + C$       d)  $-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C$   
e)  $2(\sqrt{x} - \arctg \sqrt{x}) + C$ )

7. Calcular las siguientes integrales de **tipo arco tangente**:

a)  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$       b)  $\int \frac{1}{9x^2 + 6x + 2} \, dx$       c)  $\int \frac{x^3}{1+x^8} \, dx$       d)  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$       e)  $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x} \, dx$

f)  $\int \frac{a^x}{1+a^x} \, dx$       g)  $\int \frac{2^x}{1+4^x} \, dx$       h)  $\int \frac{3^x}{1+9^x} \, dx$       i)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx$       j)  $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} \, dx$

k)  $\int \frac{3x+27}{1+(3x+27)^4} \, dx$       l)  $\int \frac{1}{3+x^2} \, dx$       m)  $\int \frac{1}{4x^2+4x+2} \, dx$       n)  $\int \frac{1}{x^2+4} \, dx$

(Soluc: a)  $\arctg(x+1)$       b)  $\frac{\arctg(3x+1)}{3}$       c)  $\frac{\arctg x^4}{4}$       d)  $\arctg e^x$       e)  $x$       f)  $\frac{\ln(1+a^x)}{\ln a}$   
g)  $\frac{\arctg 2^x}{\ln 2}$       h)  $\frac{\arctg 3^x}{\ln 3}$       i)  $2\arctg \sqrt{x}$       j)  $\arctg(\ln x)$       k)  $\frac{\arctg(3x+27)^2}{6}$       l)  $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}}$   
m)  $\frac{1}{2} \arctg(2x+1)$       n)  $\frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2}$ )

8. Calcular las siguientes integrales de **tipo neperiano-arco tangente**:

a)  $\int \frac{x}{x^2+2x+17} \, dx$       b)  $\int \frac{x-1}{x^2+2x+2} \, dx$       c)  $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} \, dx$       d)  $\int \frac{x+1}{x^2+6x+13} \, dx$       e)  $\int \frac{x+1}{25+x^2} \, dx$

f)  $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5} \, dx$       g)  $\int \frac{2x+7}{x^2+x+1} \, dx$       h)  $\int \frac{x}{x^2+2x+3} \, dx$       i)  $\int \frac{x+1}{x^2-6x+13} \, dx$       j)  $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+13} \, dx$

k)  $\int \frac{2x+4}{x^2+4} \, dx$

(Soluc: a)  $\ln \sqrt{x^2+2x+17} - \frac{1}{4} \arctg \frac{x+1}{4}$       b)  $\ln \sqrt{x^2+2x+2} - 2\arctg(x+1)$       c)  $\ln \sqrt{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$   
d)  $\ln \sqrt{x^2+6x+13} - \arctg \frac{x+3}{2}$       e)  $\ln \sqrt{x^2+25} + \frac{1}{5} \arctg \frac{x}{5}$       f)  $\ln \sqrt{x^2-2x+5} + 2 \arctg \frac{x-1}{2} + C$   
g)  $\ln(x^2+x+1) + 4\sqrt{3} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$       h)  $\ln \sqrt{x^2+2x+3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}}$       i)  $\ln \sqrt{x^2-6x+13} + 2 \arctg \frac{x-3}{2}$   
j)  $\ln(x^2-4x+13) + 3 \arctg \frac{x-2}{3}$       k)  $\ln(x^2+4) + 2 \arctg \frac{x}{2}$ )

9. Calcular **por partes** las siguientes integrales:

a)  $\int x^2 e^x \, dx$       b)  $\int x \ln x \, dx$       c)  $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$       d)  $\int x^2 \ln x \, dx$       e)  $\int \ln^2 x \, dx$

f)  $\int \ln(x+1) dx$       g)  $\int \arccos x dx$       h)  $\int x^2 \cos x dx$       i)  $\int x^3 e^{-x^2} dx$       j)  $\int (x^2 - 2x - 1) e^x dx$   
k)  $\int e^x \sen x dx$       l)  $\int (x^2 + 1) e^{-x} dx$       m)  $\int x^3 \cos x^2 dx$       n)  $\int x^2 e^{2x+1} dx$

(Soluc: a)  $e^x(x^2 - 2x + 2)$       b)  $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$       c)  $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3}$       d)  $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$   
e)  $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$       f)  $x \ln(x+1) - x + \ln(x+1)$       g)  $x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$       h)  $x^2 \sen x + 2x \cos x - 2 \sen x$   
i)  $-\frac{x^2+1}{2e^{x^2}}$       j)  $e^x(x^2 - 4x + 3)$       k)  $\frac{e^x(\sen x - \cos x)}{2}$       l)  $-\frac{x^2+2x+3}{e^x}$   
m)  $\frac{1}{2} x^2 \sen x^2 + \frac{1}{2} \cos x^2$       n)  $\frac{x^2}{2} e^{2x+1} - \frac{x}{2} e^{2x+1} + \frac{1}{4} e^{2x+1}$  )

10. Calcular las siguientes integrales **racionales**:

a)  $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$       b)  $\int \frac{x^2-6x+7}{x^3-4x^2+x+6} dx$       c)  $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4} dx$       d)  $\int \frac{1}{x^2-5x} dx$   
e)  $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$       f)  $\int \frac{2x^3-5x^2+4x-2}{x^2-3x+2} dx$       g)  $\int \frac{2x^2+3}{x^3+x^2-2} dx$       h)  $\int \frac{x^2-2x+10}{x^3-3x+2} dx$   
i)  $\int \frac{7x^2+3x+5}{x^3+x} dx$       j)  $\int \frac{9x+23}{x^2+6x+9} dx$       k)  $\int \frac{8x^2-2x-1}{x^3-x^2+4x-4} dx$       l)  $\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2} dx$   
m)  $\int \frac{2x^2-4x+1}{x^3-4x^2+5x-2} dx$       n)  $\int \frac{2x^2-8x-1}{2x^2-7x+3} dx$       o)  $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx$       p)  $\int \frac{x+2}{x^2-x-6} dx$   
q)  $\int \frac{x^4-3x^3+2x^2+3}{x^3-3x^2+4} dx$       r)  $\int \frac{dx}{e^x+1}$

(Soluc: a)  $\ln \frac{(x-3)^7}{(x-2)^5}$       b)  $\ln \frac{\sqrt[3]{x-2} \sqrt[6]{(x+1)^7}}{\sqrt{x-3}}$       c)  $\ln(x^2-x-2) - \frac{1}{x-2}$       d)  $\ln \sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}$   
e)  $\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{4}{x-1}$       f)  $x^2+x+\ln[(x-1)(x-2)^2]$       g)  $\ln[(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}] - 2 \arctg(x+1)$   
h)  $\ln \frac{(x+2)^2}{(x-1)} - \frac{3}{x-1}$       i)  $\ln[x^5(x^2+1)] + 3 \arctg x$       j)  $\ln(x+3)^9 + \frac{4}{x+3}$       k)  $\ln[(x-1)\sqrt{(x^2+4)^7}] + \frac{5}{2} \arctg \frac{x}{2}$   
l)  $\frac{x^2}{2} + x + \ln(x^2-3x+2)$       m)  $\ln(x^2-3x+2) - \frac{1}{x-1}$       n)  $x - \ln \frac{\sqrt[5]{(x-3)^7}}{\sqrt[10]{(2x-1)^9}}$       o)  $\ln(x^2+x-6)$   
p)  $\ln(x-3)$       q)  $\frac{x^2}{2} + \ln(x^2-x-2) - \frac{1}{x-2}$       r)  $x - \ln(e^x+1)$  )

11. Calcular las siguientes integrales **trigonométricas no inmediatas**, haciendo cambios o transformando los integrandos:

a)  $\int \cos^5 x dx$  (hacer  $\sen x=t$ )      b)  $\int \sen^5 x dx$  (hacer  $\cos x=t$ )      c)  $\int \frac{\sen x + \tg x}{\cos x} dx$  (descomponer el integrando)  
d)  $\int \sen^2 x \cos^2 x dx$       e)  $\int \sec x dx$       f)  $\int \cos x \ctg^2 x dx$  (sustituir  $\ctg^2 x = \frac{1}{\sen^2 x} - 1$ )  
g)  $\int \cos^2 3x dx$

(Soluc: a)  $\sen x - \frac{2}{3} \sen^3 x + \frac{\sen^5 x}{5}$       b)  $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5}$       c)  $\sec x - \ln \cos x$       d)  $\frac{x}{8} - \frac{\sen 4x}{32}$   
e)  $\ln \sqrt{\frac{\sen x + 1}{1 - \sen x}}$       f)  $-\cos \ctg x - \sen x$       g)  $\frac{x}{2} + \frac{\sen 6x}{12}$  )

12. Calcular por el método más adecuado (entre paréntesis figura una ayuda) las siguientes integrales:

- |                                                                                      |                                                                       |                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| a) $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx$ (inmediata)                                           | b) $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx$ (tipo ln)                          | c) $\int (x-1)e^x dx$ (por partes)                       |
| d) $\int (x^2-2x-3)\ln x dx$ (por partes)                                            | e) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ (raíces reales simples)                  | f) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ (raíces reales simples) |
| g) $\int \frac{6x+8}{x^2+2x+5} dx$ (ln-arctg)                                        | h) $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4} dx$ (raíces reales simples)           | i) $\int \sec^3 x dx$ (cambio $\text{sen} x=t$ )         |
| j) $\int \frac{1+\text{sen}^2 x}{\text{sen} x \cos x} dx$ (cambio $\text{sen} x=t$ ) | k) $\int \frac{\cos x}{1-\cos x} dx$ (transformar el integrando)      | l) $\int \cos 3x \text{sen}^2 3x dx$ (inmediata)         |
| m) $\int x^2 \text{sen} 3x dx$ (por partes)                                          | n) $\int x \arctg x dx$ (por partes)                                  | o) $\int x^2 e^{3x} dx$ (por partes)                     |
| p) $\int \frac{x-3}{x^2+49} dx$ (ln-arctg)                                           | q) $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$ (raíces reales simples) | r) $\int x \ln(x+1) dx$ (por partes)                     |
| s) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ (inmediata)                                           | t) $\int \text{sen}(\ln x) dx$                                        | u) $\int x[\ln(x^2+1)-e^{-x}] dx$                        |
| v) $\int \frac{1+2x}{1+x^2} dx$                                                      | w) $\int \frac{1+x}{1-x} dx$ (hacer la división)                      | x) $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$ (hacer la división)     |
| y) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$ (hacer la división)                                   | z) $\int \frac{x}{x^2+9} dx$                                          | a) $\int \frac{\sqrt{7+2\text{tg} x}}{\cos^2 x} dx$      |
| β) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx$ (tipo arcosen)                                   | γ) $\int \frac{1}{x[\ln^3 x-2\ln^2 x-\ln x+2]} dx$ (hacer $\ln x=t$ ) |                                                          |

(Soluciones:

- |                                                                                         |                                                                            |                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\frac{-1}{x-1}$                                                                     | b) $\ln \sqrt[6]{3x^2-6x+5}$                                               | c) $xe^x - 2e^x$                                                                                                                  |
| d) $\ln x \left( \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x$ | e) $\ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$                                            | f) $\ln \frac{(x-1)^2}{x+2}$                                                                                                      |
| g) $\ln(x^2+2x+5)^3 + \arctg \frac{x+1}{2}$                                             | h) $\frac{x^2}{2} + 5x + \ln \sqrt[3]{\frac{(x-4)^{65}}{(x-1)^2}}$         | i) $\ln \sqrt{\text{sen} x + 1} - \ln \sqrt[3]{\text{sen} x - 1} - \frac{1}{4(\text{sen} x - 1)} - \frac{1}{4(\text{sen} x + 1)}$ |
| j) $\ln \frac{\text{sen} x}{\cos^2 x}$                                                  | k) $-x - \text{cosec} x - \text{ctg} x$                                    | l) $\frac{\text{sen}^3 3x}{9}$                                                                                                    |
| m) $-\frac{x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2x \text{sen} 3x}{9} + \frac{2 \cos 3x}{27}$         | n) $\frac{x^2 \arctg x - x + \arctg x}{2}$                                 | o) $\frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{3} + \frac{2e^{3x}}{9}$                                                               |
| p) $\ln(x^2+49) - \frac{6}{7} \arctg \frac{x}{7}$                                       | q) $\frac{x^2}{2} + x + \ln x - \ln \sqrt[3]{(x-2)^2} - \ln \sqrt[3]{x+1}$ | r) $x^2 \ln \sqrt{x+1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \ln \sqrt{x+1}$                                                            |
| s) $\frac{\ln^4 x}{4}$                                                                  | t) $\frac{1}{2} x (\text{sen} \ln x - \cos \ln x)$                         | u) $\frac{x^2 \ln \sqrt{x^2+1}}{2} + \ln \sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x+1}{e^x}$                                          |
| v) $\arctg x + \ln(x^2+1)$                                                              | w) $-x - \ln(1-x)^2$                                                       | x) $\frac{x^2}{2} + \ln(x+1)$                                                                                                     |
| y) $\frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1)^2$                                                     | z) $\ln \sqrt{x^2+9}$                                                      | a) $\frac{\sqrt{(7+2\text{tg} x)^3}}{3}$                                                                                          |
| γ) $\ln \sqrt[6]{\frac{(\ln x - 2)^2 (\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^3}}$                      |                                                                            |                                                                                                                                   |

13. Calcular la primitiva de  $f(x)=\ln^2 x$  que se anula en  $x=e$

14. Determinar  $f(x)$  sabiendo que  $f'''(x)=24x$ ,  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=1$  y  $f''(0)=2$  (Soluc:  $f(x)=x^4+x^2+x$ )

15. Hallar un polinomio cuya derivada sea  $x^2+x-6$  y tal que el valor de su máximo sea tres veces mayor que el de su mínimo. (Soluc:  $p(x)=x^3/3+x^2/2-6x+71/4$ )

## INTEGRAL DEFINIDA

## EJERCICIOS

### ■ Integral definida:

1. Definir la regla de Barrow. Calcular:  $\int_1^3 |x| dx$  (Soluc: 4)

2. Calcular:  $\int_0^1 x \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$  (Soluc:  $\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^3} - a^3}{3b^2}$ )

3. Calcular:  $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \operatorname{sen} x^2 dx$  (Soluc: 1/2)

4. Calcular:  $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$  (Soluc:  $\pi/4 - 1/2$ )

5. Calcular:  $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-2x} dx$  (Soluc:  $\frac{3}{4} - \frac{7}{4e^2}$ )

6. Calcular:  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$  (Soluc:  $\ln \frac{4}{3}$ )

7. Calcular:  $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$  (Soluc:  $\ln \sqrt[3]{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ )

8. Hallar el valor de  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx$  sin necesidad de integrar.

(Soluc: 0, por ser el integrando función impar y el intervalo de integración simétrico)

9. Sean:  $a = \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}^2 x dx$        $b = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx$

Calcular  $a+b$  y  $a-b$  y obtener los valores de  $a$  y  $b$ . (Soluc:  $a=(\pi^2+4)/16$ ;  $b=(\pi^2-4)/16$ )

### ■ Área bajo una curva:

10. Calcular el área limitada por la curva  $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ , las rectas  $x=2$ ,  $x=2\sqrt{3}$  y el eje  $x$ . (Soluc:  $\pi/24 u^2$ )

11. Hallar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en el polinomio  $P(x)=ax^2+bx+c$  de forma que  $P(1)=4$ ,  $P'(1)=8$  y  $P(2)+15P(0)=0$ .  
Representar la función y calcular el área finita comprendida entre la curva y el eje  $x$ .  
(Soluc:  $P(x)=3x^2+2x-1$ ;  $32/27 u^2$ )

12. Calcular el área limitada por la curva  $y = \ln^2 x$ , las rectas  $x=1$ ,  $x=e^2$  y el eje  $x$ . (Soluc:  $2e^2 - 2 u^2$ )

13. Calcular el área limitada por la curva  $y = \sqrt{1-x^2}$  y las rectas  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $x=\sqrt{2}/2$ . (Soluc:  $(\pi+2)/8 u^2$ )
14. Calcular el área comprendida entre la curva  $y = \frac{1}{1+x^2}$  el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva. (Soluc:  $\pi/3 u^2$ )
15. Dada la función  $y = \frac{x}{x^2+2}$ , calcular el área encerrada por la curva, el eje x y las rectas perpendiculares al eje x que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada. (Soluc:  $\ln 2 u^2$ )

16. Considerar la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 10-3x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$ . Representarla y calcular las siguientes integrales:

a)  $\int_{-2}^1 f(x) dx$       b)  $\int_1^4 f(x) dx$       c)  $\int_{-2}^4 f(x) dx$

17. Considérese la función

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

y sea  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$        $1 \leq x \leq 2$

- a) Hallar una expresión explícita para F(x). (Soluc:  $F(x)=x-1$ )  
b) Dibujar F(x).

### ■ Área entre dos curvas:

18. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las líneas  $y=x$ ,  $y=x(6-x)$ . (Soluc:  $125/6 u^2$ )
19. Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas  $y=x^2$ ,  $y=-2x^2+3$ . (Soluc:  $4 u^2$ )
20. Dibujar la curva  $y=x^2-3x-10$ , y calcular el área del recinto limitado por esta curva y la recta  $y=2x-4$  (Soluc:  $343/6 u^2$ )
21. Hallar el área de la región limitada, para  $x>0$ , por  $y=x^3$  y la recta  $y=8x$  (Soluc:  $16 u^2$ )
22. Calcular el área comprendida entre las curvas  $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$  y  $g(x)=x^4+4x^3-8x^2+4x-1$ , sin necesidad de representarlas. (Soluc.  $37/12 u^2$ )
23. Sean  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$  y  $g(x) = |1-x|$ . a) Dibujar sus gráficas en los mismos ejes y hallar sus puntos de intersección.  
b) Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.
24. Calcular el área de la región del semiplano  $y \geq 0$  limitada por la curva  $y=\ln x$ , su tangente en  $x=1$  y la recta  $x=3$ . (Soluc: la tangente es  $y=x-1$ ; el área es  $4-3\ln 3 u^2$ )
25. Calcular el área de la región encerrada entre  $y=x^2$  e  $y=\sqrt{x}$  (Soluc:  $1/3 u^2$ )
26. Calcular el área de la región encerrada entre  $y=x^3$  e  $y=\sqrt[3]{x}$  (Soluc:  $1 u^2$ )
27. Hallar el área de la región acotada del plano limitada por las parábolas  $y=x^2-x$ ,  $y^2=2x$ . (Soluc:  $2 u^2$ )
28. Calcular el área de la región situada entre la recta  $x=1$  y las curvas  $y=x^2$  e  $y=8/x$  (Soluc:  $8\ln 2-7/3 u^2$ )

29. Hallar el área del recinto acotado por las curvas  $y=x^3$ ,  $y=16/x$  y la recta  $x=1$  (Soluc:  $16\ln 2 - 15/4 u^2$ )
30. Calcular el área del recinto limitado por la curva  $y=e^{3x}$  y la cuerda de la curva que une el punto de abscisa  $x=0$  con el de abscisa  $x=1$  (Soluc:  $(e^3+5)/6 u^2$ )
31. Sea  $a>0$ . Hallar, en función de  $a$ , el área limitada por la parábola  $y=x^2$  y la recta  $y=ax$  (Soluc:  $a^3/6 u^2$ )
32. Se considera la función  $y = \frac{2x^2}{9-x^2}$   
 a) Dibujar su gráfica indicando su dominio de definición.  
 b) Calcular el área de la región acotada limitada por la curva anterior y la recta  $y=1$ . (Soluc:  $6[\sqrt{3} + \ln(2-\sqrt{3})] u^2$ )
33. Hallar el área de las regiones comprendidas entre la curva  $y=x^2$  y las rectas  $y=x$ ,  $x=0$ ,  $x=2$ . (Soluc:  $1 u^2$ )
34. Calcular el área de la región limitada por las curvas  $y=x^2$  e  $y=x^{1/3}$ , entre  $x=-1$  y  $x=1$  (Soluc:  $3/2 u^2$ )
35. Calcular el área del recinto limitado por las rectas  $y=x$ ,  $y=2x$  y la parábola  $y=x^2$  (Soluc:  $7/6 u^2$ )
36. Calcular el área limitada por la gráfica de la función  $f(x)=\ln x$ , el eje  $x$  y la recta tangente a dicha gráfica en el punto  $x=e$ . (Soluc:  $(e-2)/2 u^2$ )
37. Se considera la función  $y=x^{3/2}$   
 a) Dibujar la gráfica.  
 b) Calcular la recta tangente en  $x=1$  a la gráfica dibujada y calcular el área limitada por dicha gráfica, la tangente y el eje  $x$ . (Soluc: tangente:  $3x-2y-1=0$ ; área:  $1/15 u^2$ )
38. Hallar el área limitada por la curva  $x=16-y^2$  y el eje  $y$  (Soluc:  $256/3 u^2$ )
39. Hallar el valor de la constante  $b$  para que la función  $f(x)=x^3-2x^2+bx$  tenga por tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante. Calcular entonces el área de la región limitada por esa tangente y la gráfica de  $f$ . (Soluc:  $b=1$ ;  $4/3 u^2$ )
40. Hallar el valor del parámetro  $a$  para que el área limitada por las gráficas de las funciones  $f_1(x)=\sqrt{ax}$  y  $f_2(x)=x^2/a$  en el primer cuadrante sea igual a tres unidades. (Soluc:  $a=3$ )
41. Sabiendo que el área comprendida entre la curva  $y=\sqrt{x}$  y la recta  $y=bx$  es 1, calcular el valor de  $b$ . (Soluc:  $b=1/\sqrt[3]{3}$ )
42. Calcular el valor de  $a$  sabiendo que el área comprendida entre la parábola  $y=x^2+ax$  y la recta  $y+x=0$  es 36. (Soluc:  $a=5$ )