C/Regaliz 109, portal 3 1º-D
Telf: 950.037.276
Mvl: 673.094.173
www.ozonocentrodeestudios.com

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

11.1 – ELEMENTOS FUNDAMENTALES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CURVAS

DOMINIO

- Polinomio : D = R
- Cocientes : D = R – {puntos que anulan el denominador}
- Raíces de índice par : D = {Lo de dentro de la raíz $\geq$ 0}
- Raíces de índice impar : D = R
- Logaritmos : D = {Lo de dentro del logaritmo > 0}
- Exponenciales : D = R
- Trigonométricas : Seno y coseno D = R ; El resto se estudia como un cociente
- Arcoseno y arcocoseno : D = {-1 $\leq$ Lo de dentro del arco $\leq$ 1}

PUNTOS DE CORTE

- Con el eje OX : $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0,0)$
- Con el eje OY : $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow P(0,y_0)$

SIMETRÍA

- Simétrica respecto del OY o par: $f(-x) = f(x)$
- Simétrica respecto del Origen o impar : $-f(-x) = f(x)$
- No simétrica

SIGNO DE LA FUNCIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a$, ...
- Se resuelve la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$, $x = x_1$,.....
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f(x)$ se obtiene el signo de la función

ASÍNTOTAS

- Asíntotas verticales: Puntos donde la función se va al infinito: $y \Rightarrow \infty$, $x = a$
  - Cocientes: Puntos que anulan el denominador
  - Logaritmos : Puntos que anulan lo de dentro del logaritmo
  - Aproximación a la asíntota : Calcular límites laterales
- Asíntotas horizontales : Puntos donde la x se va al infinito : $x \Rightarrow \infty$, $y = b$
  - Cálculo : $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$
  - Aproximación $f(\pm 100)$ $\begin{matrix} > b \text{ La función por encima de la asíntota} \\ < b \text{ La función por debajo de la asíntota} \end{matrix}$
- Asíntotas oblicuas
  - Cálculo : $y = mx + n$; $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$
  - Aproximación $f(\pm 100)$–Asínt(± 100) $\begin{cases} > 0 \text{ La función por encima de la asíntota} \\ < 0 \text{ La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$

C/Regaliz 109, portal 3 1º-D
Telf: 950.037.276
Mvl: 673.094.173
www.ozonocentrodeestudios.com

MONOTONIA Y PUNTOS CRÍTICOS

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, ...$
- Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, ...$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f'(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f'(a) > 0$ la función es creciente en dicho intervalo, y si es < 0 es decreciente.

- Máximo relativo : $P(a,f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función pasa de creciente a decreciente.
- Mínimo relativo : $P(a,f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función pasa de decreciente a creciente.

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, ...$
- Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, ...$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f''(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f'(a) > 0$ la función es convexa en dicho intervalo, y si es < 0 es concava.

- Puntos de inflexión : $P(a,f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función cambia la curvatura.

TABLA DE VALORES

Dando valores a la "x" se calculan los correspondientes de la "y" sustituyendo en la función

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

11.2 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

F(x) = P(x)

DOMINIO: D(f) = R
PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES:

OX: $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0,0)$

OY: $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow Q(0,y_0)$

RAMAS INFINITAS DE LA FUNCIÓN (No hay asíntotas)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

MONOTONÍA Y EXTREMOS
CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN
REPRESENTACIÓN GRÁFICA (Y tabla de valores)

C/Regaliz 109, portal 3 1º-D
Telf: 950.037.276
Mvl: 673.094.173
www.ozonocentrodeestudios.com

11.3 – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

F(x) = g(x) / h(x)

DOMINIO: D(f) = R – {x / h(x) = 0}
PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES:
OX: $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0,0)$
OY: $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow Q(0,y_0)$
ASÍNTOTAS O RAMAS INFINITAS DE LA FUNCIÓN
MONOTONÍA Y EXTREMOS
CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN
REPRESENTACIÓN GRÁFICA (Y tabla de valores)

11.4 – REPRESENTACIÓN DE OTRO TIPO DE FUNCIONES

RAÍCES

DOMINIO: Tenerlo en cuenta en el resto de apartados
ASÍNTOTAS OBLICUAS: Hacer por separado en el más infinito y en el menos infinito.

LOGARITMOS

y = log (f(x))

DOMINIO: Tenerlo en cuenta en el resto de apartados
ASÍNTOTAS HORIZANTALES: f(x) = 0

EXPONENCIALES

$y = a^{f(x)}$

ASÍNTOTAS: hacer por separado en el más infinito y en el menos infinito.

TRIGONOMÉTRICAS

DOMINIO: Tenerlo en cuenta en el resto de apartados
PERIODICIDAD:
- seno y coseno: 2π ó 360º
- tangente: π ó 180º

C/Regaliz 109, portal 3 1º-D
Telf: 950.037.276
Mvl: 673.094.173
www.ozonocentrodeestudios.com

TEMA 11 - REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 1 : Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{x^4}{8}-\frac{2x^3}{3}$ b) $f(x)=\frac{9x^2}{x^2+x-2}$ c) $f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x^2-3x}}$

d) $f(x)=(x^2-x)e^x$ e) $f(x)=\sqrt{x^3+3x^2}$ f) $f(x)=\frac{2\ln x}{x}$

g) $y=\ln(x^2-9)$ h) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ i) $y=x^2\ln x$

j) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ k) $f(x)=xe^{x+2}$ l) $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$

m) $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$ n) $f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$ ñ) $y=x^3-3x^2+2$

o) $y=x^4-2x^2+1$ p) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x$ q) $f(x)=\frac{x^4}{2}-4x^2+6$

r) $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+3x$ s) $y=\frac{x^2-x-1}{x-2}$ t) $f(x)=\frac{x^2+1}{4-x^2}$

u) $y=\frac{2x^3}{x^2+2}$ v) $f(x)=\frac{4x}{(x+2)^2}$ w) $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$

x) $y=(x-1)e^x$ y) $f(x)=x^2e^x$ z) $y=2+\text{sen}^2x$, $x\in[0,2\pi]$

1) $y=\text{sen}2x+2\text{sen}x$, $x\in[0,2\pi]$ 2) $f(x)=\text{sen}^2x-\text{sen}x$, $x\in[0,2\pi]$ 3) $f(x)=\cos^2x+\cos x$, $x\in[0,2\pi]$

4) $f(x)=\cos x+\text{sen}x$, $x\in[0,2\pi]$ 5) $y=e^{1-x^2}$

C/Regaliz 109, portal 3 1º-D
Telf: 950.037.276
Mvl: 673.094.173
www.ozonocentrodeestudios.com

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 1 : Representa gráficamente la función: $f(x)=\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{12}-2x$

Solución:

- Dominio = **R**
- Simetrías: $f(-x)=\frac{-x^3}{18}-\frac{x^2}{12}+2x.$ No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Ramas infinitas: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2}{18}-\frac{2x}{12}-2=\frac{x^2}{6}-\frac{x}{6}-2=\frac{x^2-x-12}{6}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow x^2-x-12=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=4 \end{cases}$$

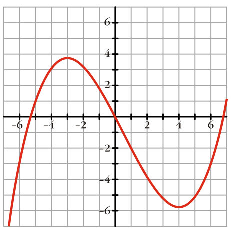
Puntos singulares: $\left(-3, \frac{-15}{4}\right);\ \left(4, \frac{-52}{9}\right)$

- Cortes con los ejes:
- Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto (0, 0)
- Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow x\left(\frac{x^2}{18}-\frac{x}{12}-2\right)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2x^2-3x-72=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+576}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{585}}{4} \rightarrow \begin{cases} x\approx -5{,}3 \\ x\approx 6{,}8 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (–5,3; 0) y (6,8; 0)

- Puntos de inflexión: $f''(x)=\frac{2x-1}{6};\ f''(x)=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{-73}{72}\right)$
- Gráfica:



EJERCICIO 2 : Dibuja la gráfica de la siguiente función: $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$

Solución:

- Dominio = **R** – {0}
- Simetrías: $f(-x)=-f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.
- Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \end{array}\right\}$ $x=0$ es asíntota vertical.
- Asíntota horizontal: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \ (\text{si } x\to-\infty,\ f(x)<0) \\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \ (\text{si } x\to+\infty,\ f(x)>0) \end{array}\right\}$ $y=0$ es asíntota horizontal.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^3-\left(x^2-1\right)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2x^4-3x^4+3x^2}{x^6}=\frac{-x^4+3x^2}{x^6}=\frac{x^2\left(-x^2+3\right)}{x^6}=\frac{3-x^2}{x^4}$$

$f'(x)=0 \;\;\rightarrow\;\; 3-x^2=0 \;\;\rightarrow\;\; x=\pm\sqrt{3}$

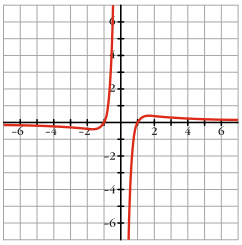
Signo de $f'(x)$:

$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$		$f'<0$
$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty,\,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\,+\infty)$; es creciente en $(-\sqrt{3},\,0)\cup(0,\,\sqrt{3})$.

Tiene un mínimo en $(-\sqrt{3};\,-0{,}38)$ y un máximo en $(\sqrt{3};\,0{,}38)$.

- Cortes con los ejes:
- No corta al eje Y, pues en $x=0$ no está definida.
- Con el eje X $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $x^2-1=0$ $\rightarrow$ $x=\pm 1$ $\rightarrow$ Puntos $(-1,\,0)$ y $(1,\,0)$.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO 3</u> : Estudia la siguiente función y dibuja su gráfica: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R}-\{-1,\,1\}$
- Simetrías: $f(-x)=-f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen.
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\; x=-1 \text{ es asíntota vertical.}\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\; x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntota oblícua: $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ $\rightarrow$ $y=x$ es asíntota oblícua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x)-x<0$ si $x\rightarrow-\infty$ (curva por debajo).

$f(x)-x>0$ si $x\rightarrow+\infty$ (curva por encima).

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0 \;\;\rightarrow\;\; x^2\left(x^2-3\right)=0 \;\;\rightarrow\;\; x=0,\; x=-\sqrt{3},\; x=\sqrt{3}$

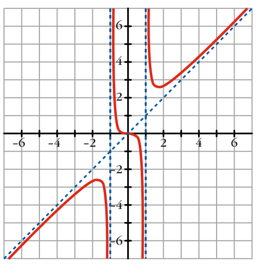
Signo de $f'(x)$:

$f'>0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'<0$		$f'>0$
$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\searrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,\,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\,+\infty)$; es decreciente en $(-\sqrt{3},\,-1)\cup(-1,\,0)\cup(0,\,1)\cup(1,\,\sqrt{3})$

Tiene un máximo en $(-\sqrt{3};\,-2{,}6)$; un punto de inflexión en $(0,\,0)$ y un mínimo en $(\sqrt{3};\,2{,}6)$.

- Solo corta a los ejes en el punto $(0,\,0)$.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO 4</u> : Representa la función: $\mathbf{f(x)=\dfrac{3x^4-8x^3}{4}}$

Solución:

- Dominio = **R**
- Simetrías: $f(-x)=\dfrac{3x^4-8x^3}{4}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Puntos singulares:

  $f'(x)=\dfrac{12x^3-24x^2}{4}=3x^3-6x^2=3x^2(x-2)$

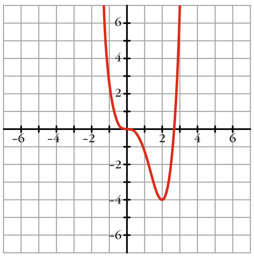
  $f'(x)=0 \;\rightarrow\; 3x^2(x-2)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow$ Puntos singulares: (0, 0) y (2, –4)
- Cortes con los ejes:

  - Con el eje $Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow$ Punto (0, 0)

  - Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; x^3(3x-8)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{8}{3} \end{cases} \;\rightarrow$ Puntos $(0,\,0)$ y $\left(\dfrac{8}{3},\,0\right)$
- Puntos de inflexión:

  $f''(x)=9x^2-12x=3x\,(3x-4)$

  $f''(x)=0 \;\rightarrow\; x=0,\; x=\dfrac{4}{3} \;\rightarrow$ Puntos $(0,\,0)$ y $\left(\dfrac{4}{3},\,\dfrac{-64}{27}\right)$
- Gráfica:



<u>EJERCICIO 5</u> : Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:
$\boldsymbol{f(x)=-2+\cos^2 x,\; x\in[0,\,2\pi]}$ **Utilizando la información obtenida, represéntala gráficamente.**

Solución:

- Dominio = $[0,\,2\pi]$
- Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=-1 \;\rightarrow$ Punto (0, –1)
- Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; -2+\cos^2 x=0 \;\rightarrow\; \cos^2 x=2 \;\rightarrow$

  $\rightarrow\; \cos x=\pm\sqrt{2} \;\rightarrow$ No tiene solución $\Rightarrow$ No corta al eje *X*.
- Máximos y mínimos: $f'(x)=2\cos x\,(-\operatorname{sen} x)=-2\cos x \operatorname{sen} x$

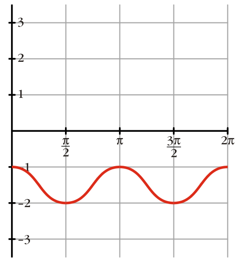
$f'(x)=0 \;\rightarrow\; -2\cos x \operatorname{sen} x=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \cos x=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{2},\; x=\dfrac{3\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x=0 \;\rightarrow\; x=0,\; x=\pi,\; x=2\pi \end{cases}$

Estudiamos el signo de $f''(x)=-2\,[\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x]$ en esos puntos:

$y''<0$ en $x=0,\; x=\pi$ y $x=2\pi \Rightarrow$ Máximos: (0, –1), (π, –1), (2π, –1)

$y''>0$ en $x=\dfrac{\pi}{2}$ y $x=\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow$ Mínimos: $\left(\dfrac{\pi}{2},\,-2\right)$; $\left(\dfrac{3\pi}{2},\,-2\right)$

- Gráfica:



EJERCICIO 6 : Estudia y representa esta función: $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$

Solución:

- Dominio $= (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
- Asíntotas:

Asíntotas verticales:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \ \rightarrow \ x = -1$ es asíntota vertical. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \ \rightarrow \ x = 2$ es asíntota vertical.

$$\text{Asíntotas horizontales}\begin{cases} \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{-x-2}{-x+1}\right) = \ln 1 = 0 \ \ (f(x) > 0) \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \ \ (f(x) < 0) \end{cases}$$

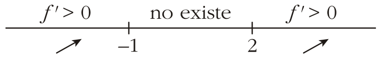
$y = 0$ es asíntota horizontal.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{(x-2)} \cdot \frac{(x+1-x+2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x-2)\ (x+1)}$$

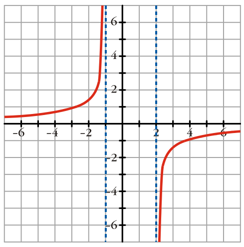
$f'(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en su dominio.

- No corta a los ejes.
- Gráfica:



EJERCICIO 7 : Representa la siguiente función: $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R}$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \ \rightarrow \ y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(y > 0)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty; \ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \rightarrow$ Rama parabólica.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

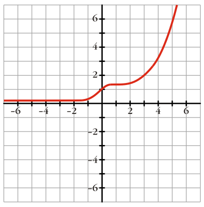
$$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\,(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0 \;\;\rightarrow\;\; x=1$

$f'(x)>0$ para todo $x\neq 1 \;\;\rightarrow\;\; f(x)$ es creciente.

Hay un punto de inflexión en $\left(1,\ \frac{e}{2}\right)$.

- Corta al eje Y en $(0,\,1)$. No corta al eje X.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO 8</u> : Estudia y representa la función: $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}}$

Solución:

- Dominio $=(-\infty,\,-2)\cup(0,\,+\infty)$
- Simetrías: $f(-x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

  No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.
- Asíntotas:

  Asíntotas verticales:

  $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty \;\;\rightarrow\;\; x=-2$ es asíntota vertical. $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \;\;\rightarrow\;\; x=0$ es asíntota vertical.

  Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \;\Rightarrow$

  $y=0$ es asíntota horizontal ($f(x)>0$ para todo x).

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento: $f(x)=\left(x^2+2x\right)^{-1/2}$

$$f'(x)=\frac{-1}{2}\left(x^2+2x\right)^{-3/2}\cdot(2x+2)=\frac{-(x+1)}{\sqrt{\left(x^2+2x\right)^3}}$$

$f'(x)=0 \;\;\rightarrow\;\; x=-1$ (no vale; pues $f(x)$ no está definida en $x=-1$).

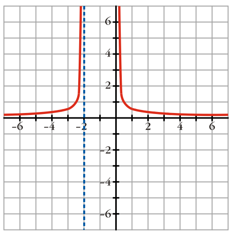
$f(x)$ no tiene puntos singulares.

Signo de $f'(x)$:

$f'>0$ ↗	-2	no existe	0	$f'<0$ ↘

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,\,-2)$ y es decreciente en $(0,\,+\infty)$.

- $f(x)$ no corta a los ejes.
- Gráfica:



<u>EJERCICIO</u> : Representa gráficamente la siguiente función: $\boldsymbol{f(x)=(1-x)\,e^x}$

Solución:

- Dominio $=\mathbf{R}$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{e^x} = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(y > 0)$.

Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \;\to\;$ Rama parabólica.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = -e^x + (1-x)\,e^x = (-1+1-x)\,e^x = -x\,e^x$

$f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$

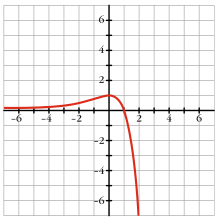
Signo de $f'(x)$:

$f' > 0 \quad | \quad f' < 0$

$\nearrow \quad 0 \quad \searrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

- Puntos de corte con los ejes:
- Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 1 \to$ Punto $(0, 1)$
- Con el eje $X \to y = 0 \to x = 1 \to$ Punto $(1, 0)$
- Gráfica:



EJERCICIO : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{-2, 2\}$
- Simetrías: $f(-x) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.
- Asíntotas verticales:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -2$ es asíntota vertical.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical.

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 \;\to\; y = -1$ es asíntota horizontal.

Si $x \to -\infty$ y si $x \to +\infty$, $f(x) < -1 \;\to\;$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2x\left(x^2-4\right) - \left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0 \quad | \quad f' < 0 \quad | \quad f' > 0 \quad | \quad f' > 0$

$\searrow \quad -2 \quad \searrow \quad 0 \quad \nearrow \quad 2 \quad \nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; es creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. Tiene un mínimo en $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

- Cortes con los ejes:

- Con el eje Y $\to x = 0 \to y = -\frac{1}{4} \to$ Punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

- Con el eje $X \to y = 0 \to 1 - x^2 = 0 \to x = -1;\ x = 1 \to$ Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

- Gráfica: