

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

12.1 – CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Definición

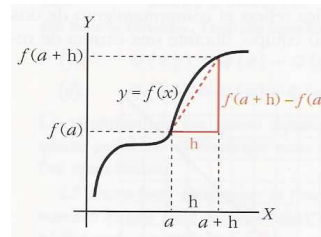
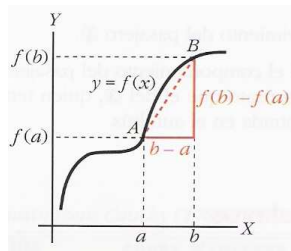
Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, $y = f(x)$ en un intervalo

$$[a,b] \text{ al cociente: } T.V.M.[a,b] = \frac{\text{Variación de } f(x)}{\text{Variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

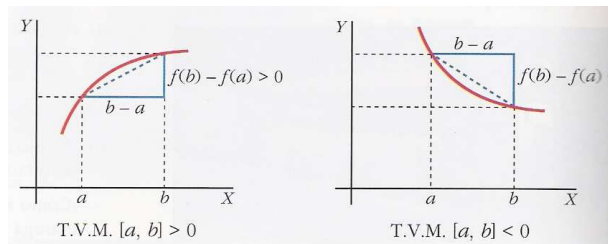
Y es la pendiente del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$

Con frecuencia, el intervalo se le designa mediante la expresión $[a, a+h]$, nombrando, así, a un extremo del intervalo a, y a su longitud, h. En tal caso, la tasa de variación

media se obtiene : $T.V.M. [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$



Si una función es creciente en $[a,b]$, su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Definición: Se llama **tasa de variación instantánea (T.V.I)** de una función, $y = f(x)$ en un punto a

$$T.V.I.(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Y es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

Significado:

Si es positiva \Rightarrow La función es creciente en el punto a

Si es negativa \Rightarrow La función es decreciente en el punto a

12.2 – DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

DEFINICIÓN

Llamaremos **derivada de una función $y = f(x)$ en el punto $x = a$** a la tasa de variación instantánea de dicha función en el punto a , y se designa por $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

SIGNIFICADO

La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es **la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$**

Por tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en el punto $x = a$:

$$y - f(a) = f'(a) (x - a)$$

APLICACIONES

- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$ La función es creciente en el punto $x = a$
- Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$ La función es decreciente en el punto $x = a$
- Si hay un máximo o mínimo relativo en $x = a \Rightarrow f'(a) = 0$

12.3 – FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

Se llama **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a una función f' que asocia a cada abscisa, x , la derivada de f en ese punto, $f'(x)$, es decir, la pendiente de la curva $y = f(x)$ en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f' o Df :

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

12.4 – REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

OPERACIONES CON DERIVADAS

- Multiplicación por un número : $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
- Suma y resta: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- Producto : $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Cociente : $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- Composición : $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

REGLAS DE DERIVACIÓN

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = f^n(x)$	$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \text{Ln } a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot \text{Ln } a \cdot f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \text{Ln } a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \text{Ln } a}$
$y = \text{Ln } x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \text{Ln } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \text{sen } x$	$y' = \text{cos } x$	$y = \text{sen } f(x)$	$y' = \text{cos } f(x) \cdot f'(x)$
$y = \text{cos } x$	$y' = -\text{sen } x$	$y = \text{cos } f(x)$	$y' = -\text{sen } f(x) \cdot f'(x)$
$y = \text{tag } x$	$y' = 1 + \text{tag}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$	$y = \text{tag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\text{cos}^2 f(x)} = [1 + \text{tag}^2 f(x)] \cdot f'(x)$
$y = \text{arcsen } x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arcsen } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arccos } x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arccos } f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \text{arctag } x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arctag } f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

12.5 – UTILIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA

CALCULAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN VARIOS PUNTOS

Para hallar $f'(a)$ se calcula la expresión general de la derivada $f'(x)$ y luego se sustituye en la derivada la x por a .

OBTENER LAS ABCISAS EN LAS CUALES LA DERIVADA TIENE UN CIERTO VALOR

Para averiguar los valores de x para los cuales $f'(x) = k$, se calcula la expresión de la derivada en general $f'(x)$, se iguala a k y se resuelve la ecuación.

OBTENER LAS ABCISAS DE LOS PUNTOS SINGULARES

Se llaman **puntos singulares** a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.

Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de la ecuación : $f'(x) = 0$

OBTENER LOS TRAMOS DONDE LA CURVA CRECE O DECRECE

Si $f'(x) > 0$ la función es creciente y si $f'(x) < 0$ la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

12.6 – ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

DOMINIO

- Polinomio : $D = \mathbb{R}$
- Cocientes : $D = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$
- Raíces de índice par : $D = \{\text{Lo de dentro de la raíz} \geq 0\}$
- Raíces de índice impar : $D = \mathbb{R}$
- Logaritmos : $D = \{\text{Lo de dentro del logaritmo} > 0\}$
- Exponenciales : $D = \mathbb{R}$
- Trigonómicas : Seno y coseno $D = \mathbb{R}$; El resto se estudia como un cociente
- Arcos : $D = \{-1 \leq \text{Lo de dentro del arco} \leq 1\}$

PUNTOS DE CORTE

- Con el eje OX : $y = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow P(x_0, 0)$
- Con el eje OY : $x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow P(0, y_0)$

SIMETRÍA

- Simétrica respecto del OY o par: $f(-x) = f(x)$
- Simétrica respecto del Origen o impar : $-f(-x) = f(x)$

SIGNO DE LA FUNCIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f(x)$ se obtiene el signo de la función

ASÍNTOTAS

- Asíntotas verticales: Puntos donde la función se va al infinito: $y \Rightarrow \infty$, $x = a$
 - Cocientes: Puntos que anulan el denominador
 - Logaritmos : Puntos que anulan lo de dentro del logaritmo
 - Aproximación a la asíntota : Calcular límites laterales
- Asíntotas horizontales : Puntos donde la x se va al infinito : $x \Rightarrow \infty$, $y = b$
 - Cálculo : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Rightarrow y = b$
 - Aproximación(en $x = \pm 100$): $\begin{cases} f(x) > b \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < b \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$
- Asíntotas oblicuas
 - Cálculo : $y = mx + n$; $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$
 - Aproximación(en $x = \pm 100$): $\begin{cases} f(x) > \text{Asint}(x) \Rightarrow \text{La función por encima de la asíntota} \\ f(x) < \text{Asint}(x) \Rightarrow \text{La función por debajo de la asíntota} \end{cases}$

MONOTONIA Y PUNTOS CRÍTICOS

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f'(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f'(a) > 0$ la función es creciente en dicho intervalo, y si es < 0 es decreciente.
- Máximo relativo : $P(a, f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función pasa de creciente a decreciente.
- Mínimo relativo : $P(a, f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función pasa de decreciente a creciente.

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

- Se calculan los puntos que no pertenecen al dominio $\Rightarrow x = a, \dots$
- Se resuelve la ecuación $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_0, x = x_1, \dots$
- Estos puntos dividen la recta real en partes, tomando un punto en cada intervalo y sustituyendo en $y = f''(x)$ se obtiene el signo de la función
- Si $f''(a) > 0$ la función es convexa en dicho intervalo, y si es < 0 es concava.
- Puntos de inflexión : $P(a, f(a))$: $x = a$ es el punto del dominio donde la función cambia la curvatura.

TABLA DE VALORES

Dando valores a la “x” se calculan los correspondientes de la “y” sustituyendo en la función

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

EJERCICIO 1 : Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo $[1, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo: $f(x) = 2x^2 - 3x$

$$\text{Solución: T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2 - (-1)}{1} = \frac{(2+1)}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en el intervalo $[1, 2]$.

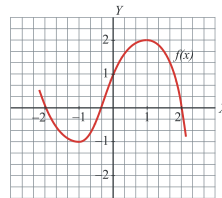
EJERCICIO 2 : Dada la función: $f(x) = (x - 1)^3$

Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

$$\text{Solución: T.V.M. } [0, 1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0 - (-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en este intervalo.

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:



- a) $[-1, 0]$
b) $[1, 2]$

Solución:

$$\text{a) T.V.M. } [-1, 0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en $[-1, 0]$. (También se puede apreciar directamente en la gráfica).

$$\text{b) T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 2}{1} = -2 \Rightarrow \text{La función decrece en este intervalo.}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 4 : Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

EJERCICIO 5 : Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x-1}{3}$.

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{3} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 6 : Halla la derivada de la función $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = 2$, aplicando la definición de derivada

$$\text{Solución: } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

EJERCICIO 7 : Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x) = \frac{2}{x}$.

$$\text{Solución: } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2 - 2x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1 - x)}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x} = -2$$

FUNCIÓN DERIVADA, APLICANDO LA DEFINICIÓN

EJERCICIO 8 : Halla $f'(x)$, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{x+1}{3}$ c) $f(x) = 2x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \frac{2x}{3}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 1 - x^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \end{aligned}$$

$$\text{b) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1}{3} - \frac{x+1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + h^2 + 2xh) - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2h^2 + 4xh - 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h + 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x) = 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)}{3} - \frac{2x}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2x+2h-2x}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}$$

CÁLCULO DE DERIVADAS INMEDIATAS

EJERCICIO 9 : Halla la función derivada de:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ d) $f(x) = \ln x$
 e) $f(x) = 2x^5 + \frac{x}{3}$ f) $f(x) = \operatorname{sen} x$ g) $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{5}$ h) $f(x) = \cos x$
 i) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ j) $f(x) = \operatorname{tg} x$ k) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$ l) $f(x) = xe^x$
 m) $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 2}$ n) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ ñ) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 3}$ o) $f(x) = x \ln x$
 p) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$ q) $f(x) = \frac{3x + 1}{e^x}$ r) $f(x) = \frac{3x^2}{2x + 3}$ s) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sen} x$

Solución:

a) $f'(x) = 12x^3 - 2$ b) $f'(x) = e^x$ c) $f'(x) = 6x^2 - 2x$ d) $f'(x) = \frac{1}{x}$
 e) $f'(x) = 10x^4 + \frac{1}{3}$ f) $f'(x) = \cos x$ g) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ h) $f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned} \text{i) } f'(x) &= 12x^2 - 6x & \text{j) } f'(x) &= 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \text{k) } f'(x) &= \frac{2x(2x+1) - (x^2+2) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+2x-2x^2-4}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2} & \text{l) } f'(x) &= e^x + xe^x = (1+x)e^x \\ \text{m) } f'(x) &= \frac{3(x^2-2) - (3x-1)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{3x^2-6-6x^2+2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-3x^2+2x-6}{(x^2-2)^2} & \text{n) } f'(x) &= 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x \\ \text{ñ) } f'(x) &= \frac{-2x(x-3) - (1-x^2)}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2+6x-1+x^2}{(x-3)^2} = \frac{-x^2+6x-1}{(x-3)^2} & \text{o) } f'(x) &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ \text{p) } f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} & \text{q) } f'(x) &= \frac{3e^x - (3x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3-3x-1)}{(e^x)^2} = \frac{2-3x}{e^x} \\ \text{r) } f'(x) &= \frac{6x(2x+3) - 3x^2 \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{12x^2+18x-6x^2}{(2x+3)^2} = \frac{6x^2+18x}{(2x+3)^2} \\ \text{s) } f'(x) &= \frac{1}{3} x^{-2/3} \operatorname{sen} x + x^{1/3} \cdot \cos x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen} x + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

CÁLCULO DE DERIVADAS

EJERCICIO 10 : Halla la función derivada de:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= (3x^2 + x)^4 & \text{b) } f(x) &= \sqrt{4x^3 + 1} & \text{c) } f(x) &= e^{4x^3-2x} & \text{d) } f(x) &= \ln(3x^4 - 2x) \\ \text{e) } f(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) & \text{f) } f(x) &= 3x^4 - \frac{9x^2}{3} & \text{g) } f(x) &= \frac{3x^2-2}{x^2-1} & \text{h) } f(x) &= xe^x \\ \text{i) } f(x) &= 8x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3} & \text{j) } f(x) &= (x^4 - 3x)e^x & \text{k) } f(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) & \text{l) } f(x) &= \frac{3x^4}{2} - \frac{6x^3}{5} \\ \text{m) } f(x) &= \frac{x^2-3}{2x^3+1} & \text{n) } f(x) &= \ln(x^4 - 2x) & \text{ñ) } f(x) &= \frac{-2x^4+3x^2}{5} & \text{o) } f(x) &= \frac{3x-4}{x^2+3x} \\ \text{p) } f(x) &= \sqrt{2x^3-3} & \text{q) } f(x) &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^7 & \text{r) } f(x) &= e^x \cdot \operatorname{sen} x & \text{s) } f(x) &= \cos\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) \\ \text{t) } f(x) &= 4x^5 - \frac{2x}{3} & \text{u) } f(x) &= (x^2 - 3x)e^x & \text{v) } f(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \\ \text{w) } f(x) &= -x^7 + \frac{3}{4}x - 1 & \text{x) } f(x) &= \frac{4x^3-3}{x^2-1} & \text{y) } f(x) &= e^{7x^4-3} \\ \text{z) } f(x) &= 9x^2 - 3x^4 + \frac{1}{3} & \text{1) } f(x) &= \frac{3x^3}{4-x^2} & \text{2) } f(x) &= \ln(2x^5 + 3x) \\ \text{3) } f(x) &= \frac{-3x^5+2x}{7} & \text{4) } f(x) &= x^4 \cos x & \text{5) } f(x) &= e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \\ \text{6) } f(x) &= \frac{4x^6}{3} - 2x + 5 & \text{7) } f(x) &= \frac{2x}{x^2+1} & \text{8) } f(x) &= \sqrt{2x-3x^4} \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= 4(3x^2 + x)^3 \cdot (6x+1) \\ \text{b) } f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{4x^3+1}} \cdot 12x^2 = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3+1}} = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}} \\ \text{c) } f'(x) &= e^{4x^3-2x} \cdot (12x^2 - 2) \end{aligned}$$

$$d) f'(x) = \frac{1}{3x^4 - 2x} \cdot (12x^3 - 2) = \frac{12x^3 - 2}{3x^4 - 2x}$$

$$e) f'(x) = \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) \cdot \frac{(2x-3) - (x+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$$

$$f) f'(x) = 12x^3 - \frac{18x}{3}$$

$$g) f'(x) = \frac{6x(x^2-1) - (3x^2-2) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^3 - 6x - 6x^3 + 4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$h) f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \quad i) f'(x) = 40x^4 - 6x^2$$

$$j) f'(x) = (4x^3 - 3)e^x + (x^4 - 3x)e^x = (4x^3 - 3 + x^4 - 3x)e^x = (x^4 + 4x^3 - 3x - 3)e^x$$

$$k) f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x^2-1-x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$$

$$l) f'(x) = \frac{12x^3}{2} - \frac{18x^2}{5} = 6x^3 - \frac{18x^2}{5}$$

$$m) f'(x) = \frac{2x(2x^3+1) - (x^2-3) \cdot 6x^2}{(2x^3+1)^2} = \frac{4x^4 + 2x - 6x^4 + 18x^2}{(2x^3+1)^2} = \frac{-2x^4 + 18x^2 + 2x}{(2x^3+1)^2}$$

$$n) f'(x) = \frac{1}{x^4-2x} \cdot (4x^3-2) = \frac{4x^3-2}{x^4-2x}$$

$$\tilde{n}) f'(x) = \frac{-8x^3 + 6x}{5}$$

$$o) f'(x) = \frac{3(x^2+3x) - (3x-4)(2x+3)}{(x^2+3x)^2} = \frac{3x^2+9x-6x^2-9x+8x+12}{(x^2+3x)^2} = \frac{-3x^2+8x+12}{(x^2+3x)^2}$$

$$p) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3-3}} \cdot 6x^2 = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-3}}$$

$$q) f'(x) = 2x^3 - \frac{21}{5}x^6$$

$$r) f'(x) = e^x \cdot \text{sen}x + e^x \cdot \text{cos}x = (\text{sen}x + \text{cos}x)e^x$$

$$s) f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) \cdot \frac{3(x^2+2) - 3x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = -\left(\frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) =$$

$$= -\frac{3x^2+6}{(x^2+2)^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) = \frac{3x^2-6}{(x^2+2)^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$$

$$t) f'(x) = 20x^4 - \frac{2}{3}$$

$$u) f'(x) = (2x-3)e^x + (x^2-3x)e^x = e^x(2x-3+x^2-3x) = e^x(x^2-x-3)$$

$$v) f'(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \cdot \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$$

$$w) f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$$

$$x) f'(x) = \frac{12x^2(x^2-1) - (4x^3-3) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{12x^4 - 12x^2 - 8x^4 + 6x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^4 - 12x^2 + 6x}{(x^2-1)^2}$$

$$y) f'(x) = e^{7x^4-3} \cdot (28x^3) = 28x^3 \cdot e^{7x^4-3}$$

$$z) f'(x) = 18x - 12x^3$$

$$1) f'(x) = \frac{9x^2(4-x^2) - 3x^3(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{36x^2 - 9x^4 + 6x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{36x^2 - 3x^4}{(4-x^2)^2}$$

$$2) f'(x) = \frac{1}{2x^5+3x} \cdot (10x^4+3) = \frac{10x^4+3}{2x^5+3x}$$

$$3) f'(x) = \frac{-15x^4+2}{7}$$

$$4) f'(x) = 4x^3 \cos x + x^4(-\sin x) = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$$

$$5) f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$6) f'(x) = \frac{24x^5}{3} - 2 = 8x^5 - 2$$

$$7) f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$$

$$8) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-3x^4}} \cdot (-12x^3) = \frac{-12x^3}{2\sqrt{2x-3x^4}} = \frac{-6x^3}{\sqrt{2x-3x^4}}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA

EJERCICIO 11 : Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2+2x-1$ en el punto de abscisa $x=1$.

Solución: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

- $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$
- $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(1) = 2 + 2 = 4$
- La recta será: $y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 2$

EJERCICIO 12 : Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 3x$ que tenga pendiente -7 .

Solución: $m = -7 = f'(x) \Rightarrow f'(x) = 4x - 3 = -7 \Rightarrow x = -1$

- $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$
- $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5$
- $f'(-1) = -7$
- La recta será: $y - 5 = -7(x + 1) \Rightarrow y = -7x - 2$

EJERCICIO 13 : Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ que sea paralela a la recta

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

Solución: • La pendiente de la recta es $m = \frac{1}{4}$

- La pendiente es igual a la derivada: $\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$
- $y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow$ La recta será: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$

ESTUDIO DE LA MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

EJERCICIO 14 : Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = 2x^3$

c) $f(x) = 3 + 12x - 3x^2$

d) $f(x) = (x + 2)^2$

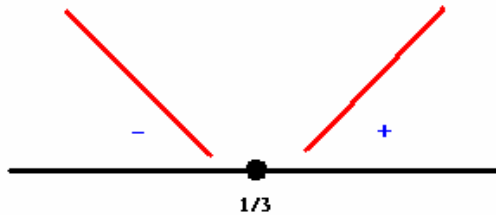
e) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2}$

Solución:

a)

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 6x - 2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/3 \end{cases}$



Creciente $(1/3, +\infty)$

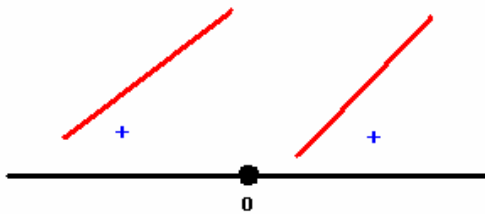
Decreciente $(-\infty, 1/3)$

Mínimo $(1/3, f(1/3)) = (1/3, 2/3)$

b)

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 6x^2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

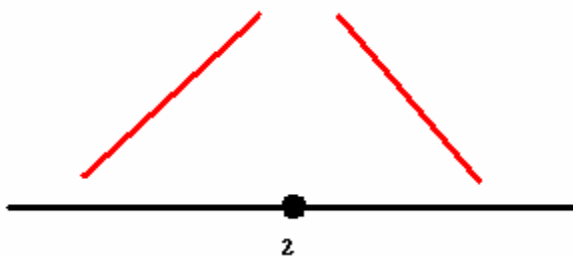


Creciente en todo \mathbb{R}

c)

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 12 - 6x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$



Creciente $(-\infty, 2)$

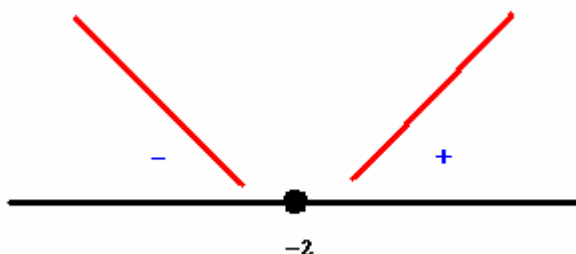
Decreciente $(2, +\infty)$

Máximo $(2, f(2)) = (2, 15)$

d)

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 2(x + 2) \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$



Creciente $(-2, +\infty)$

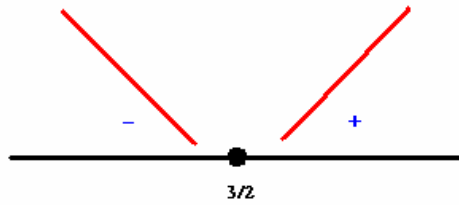
Decreciente $(-\infty, -2)$

Mínimo $(-2, f(-2)) = (-2, 0)$

e)

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = \frac{2x-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x = 3/2 \end{cases}$



Creciente $(3/2, +\infty)$

Decreciente $(-\infty, 3/2)$

Mínimo $(3/2, f(3/2)) = (3/2, -5/8)$

EJERCICIO 15 : Dada la función: $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$?

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

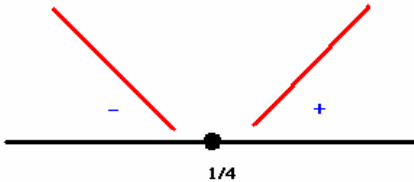
Solución: • $f'(x) = 8x - 2$

a) $f'(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Decreciente en $x = 0$

$f'(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ Creciente en $x = 1$

b) • $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 8x - 2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 8x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/4 \end{cases}$



Creciente $(1/4, +\infty)$

Decreciente $(-\infty, 1/4)$

Mínimo $(1/4, f(1/4)) = (1/4, 3/4)$

EJERCICIO 16 : Consideramos la función: $f(x) = 5x^2 - 3x$

a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

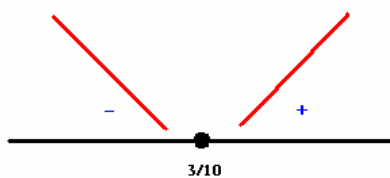
a) $f'(x) = 10x - 3$

$f'(-1) = -13 < 0 \Rightarrow$ Decreciente en $x = -1$

$f'(1) = 7 > 0 \Rightarrow$ Creciente en $x = 1$

b) • $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 10x - 3 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/10 \end{cases}$



Creciente $(3/10, +\infty)$

Decreciente $(-\infty, 3/10)$

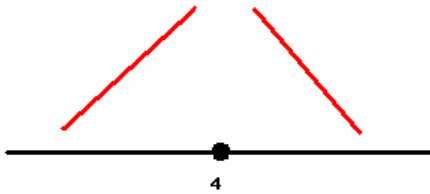
Mínimo $(3/10, f(3/10)) = (3/10, 9/20)$

EJERCICIO 17 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función: $f(x) = 8x - x^2$

Solución:

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 8 - 2x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$



Creciente $(-\infty, 4)$

Decreciente $(4, +\infty)$

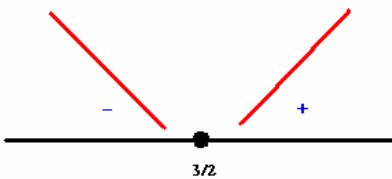
Máximo $(4, f(4)) = (4, 16)$

EJERCICIO 18 : Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$

Solución:

• $D(f) = \mathbb{R}$

• $f'(x) = \frac{2x-3}{4} \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{4} = 0 \Rightarrow x = 3/2 \end{cases}$



Creciente $(3/2, +\infty)$

Decreciente $(-\infty, 3/2)$

Mínimo $(3/2, f(3/2)) = (3/2, -9/16)$

EJERCICIO 19 : Dada la siguiente función: $f(x) = 14x - 7x^2$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$?

b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

a) $f'(x) = 14 - 14x$

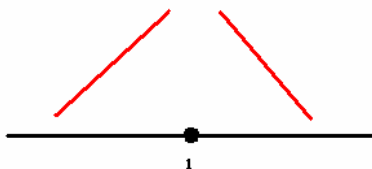
$f'(0) = 14 > 0 \Rightarrow$ Creciente en $x = 0$

$f'(4) = -42 < 0 \Rightarrow$ Decreciente en $x = 4$

b)

• $D(f) = \mathbb{R}$

• $f'(x) = 14 - 14x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 14 - 14x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$



Creciente $(-\infty, 1)$

Decreciente $(1, +\infty)$

Máximo $(1, f(1)) = (1, 7)$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

EJERCICIO 20

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el punto de la abscisa $x = 1$.

b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x = 3$?

Solución:

a) $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

• $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$

• $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(1) = 3 - 6 = -3$

• La recta será: $y + 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 2$

b) $f'(3) = 9 > 0 \Rightarrow$ Es creciente en $x = 3$.

EJERCICIO 21 : Dada la función: $f(x) = 3x^2 - x$

a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 1$.

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

a) $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

- $f(1) = 3 - 1 = 2$

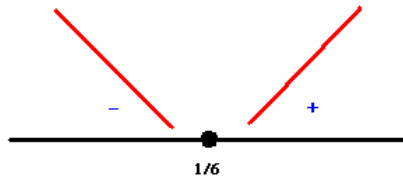
- $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(1) = 6 - 1 = 5$

- La recta será: $y - 2 = 5(x - 1) \Rightarrow y = 5x - 3$

b)

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/6 \end{cases}$



Creciente $(1/6, +\infty)$

Decreciente $(-\infty, 1/6)$

Mínimo $(1/6, f(1/6)) = (1/6, -1/12)$

EJERCICIO 22 : Consideremos la función: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$

a) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

a) $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

- $f(2) = 6 - 4 + 1 = 3$

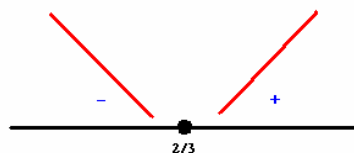
- $f'(x) = 3x - 2 \Rightarrow f'(2) = 6 - 2 = 4$

- La recta será: $y - 3 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 5$

b)

- $D(f) = \mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x - 2 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/3 \end{cases}$



Creciente $(2/3, +\infty)$

Decreciente $(-\infty, 2/3)$

Mínimo $(2/3, f(2/3)) = (2/3, 1/3)$

PUNTOS DE TANGENTE HORIZONTAL

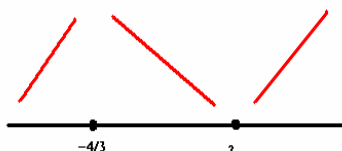
EJERCICIO 23 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

Solución:

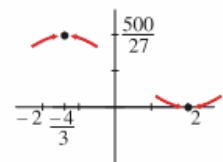
- $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{cases}$

Puntos: $(2, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, \frac{500}{27})$



Máximo en $(-\frac{4}{3}, \frac{500}{27})$

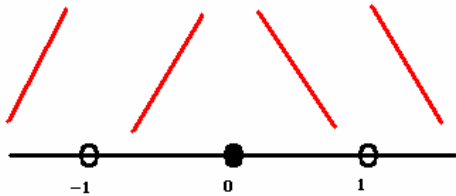
Mínimo en $(2, 0)$



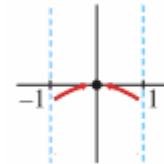
EJERCICIO 24 : Dada la función $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$, halla sus puntos singulares y represéntalos

Solución:

$$\bullet f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto: } (0, 0)$$



Máximo en (0,0)



EJERCICIO 25: Averigua los puntos de tangente horizontal de la función $f(x) = \frac{9x}{x^2 + 9}$ y represéntalos

Solución:

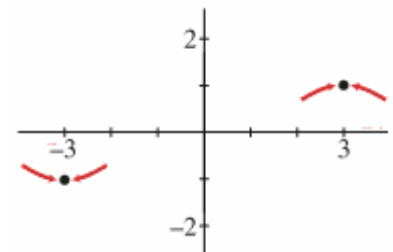
$$\bullet f'(x) = \frac{9(x^2 + 9) - 9x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{9x^2 + 81 - 18x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-9x^2 + 81}{(x^2 + 9)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow \text{Punto: } \left(-3, \frac{-3}{2}\right) \\ x_2 = 3 \rightarrow \text{Punto: } \left(3, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$



Mínimo en $\left(-3, \frac{-3}{2}\right)$

Máximo en $\left(3, \frac{3}{2}\right)$



EJERCICIO 26 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la siguiente función: $f(x) = (x - 1)^2(x + 5)$

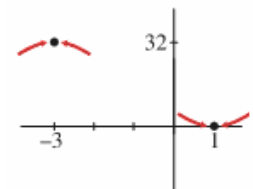
Solución:

$$\bullet f'(x) = 2(x - 1)(x + 5) + (x - 1)^2 = (x - 1)[2(x + 5) + (x - 1)] = (x - 1)(2x + 10 + x - 1) = (x - 1)(3x + 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow \text{Punto: } (1, 0) \\ x = -3 \rightarrow \text{Punto: } (-3, 32) \end{cases}$$

Máximo en (-3, 32)

Mínimo en (1, 0).

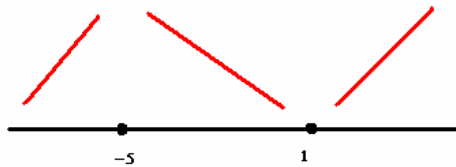


EJERCICIO 27 : Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

Solución:

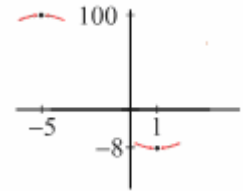
$$\bullet f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{cases} x=1 \rightarrow \text{Punto } (1, -8) \\ x=-5 \rightarrow \text{Punto } (-5, 100) \end{cases}$$



Máximo en (-5,100)

Mínimo en (1, -8).



EJERCICIO 28 : Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x) = \frac{3-x^2}{x+2}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-2x(x+2) - (3-x^2)}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2 - 4x - 3 + x^2}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

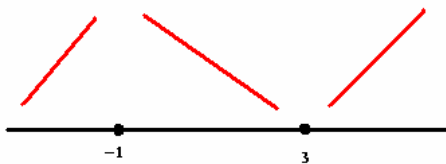
$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x=-1 \rightarrow \text{Punto } (-1, 2) \\ x=-3 \rightarrow \text{Punto } (-3, 6) \end{cases}$$

EJERCICIO 29 : Halla y representa gráficamente los máximos y mínimos de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

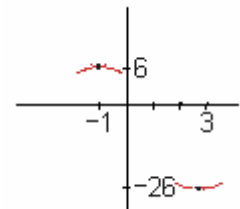
Solución: $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x=3 \rightarrow \text{Punto } (3, -26) \\ x=-1 \rightarrow \text{Punto } (-1, 6) \end{cases}$$



Máximo en (-1,6)

Mínimo en (3, -26).



EJERCICIO 30 : Determina los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

Solución:

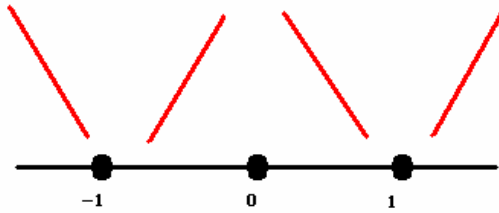
$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x+6) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x=-3 \rightarrow \text{Punto } (-3, 27) \end{cases}$$

EJERCICIO 31 : Halla y representa gráficamente los puntos singulares de la función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

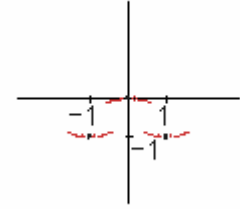
Solución:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x=-1 \rightarrow \text{Punto } (-1, -1) \\ x=0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x=1 \rightarrow \text{Punto } (1, -1) \end{cases}$$



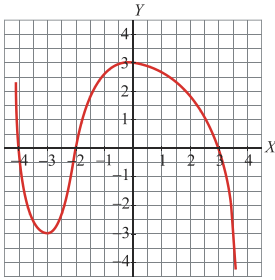
Máximo en (0,0)

Mínimo en (-1,-1) y (1,-1)



REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 32 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$. A partir de ella, indica:



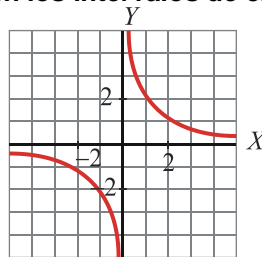
- Máximos y mínimos.
- Puntos de corte con los ejes.
- Ramas infinitas.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

- $$\left. \begin{array}{l} f'(-3) = 0 \\ f(-3) = -3 \end{array} \right\} \text{ Hay un mínimo en } (-3, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f(0) = 3 \end{array} \right\} \text{ Hay un máximo en } (0, 3)$$
- $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 3)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Decrece en $(-\infty, -3)$ y en $(0, +\infty)$; crece en $(-3, 0)$.

EJERCICIO 33 : Dada la gráfica de $f(x)$, di cuáles son sus asíntotas e indica la posición de la curva respecto a ellas. Halla también los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



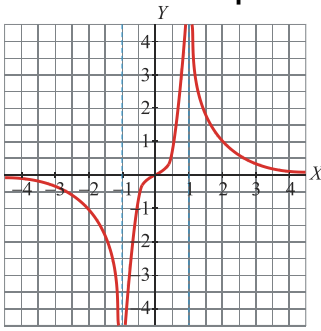
Solución:

- Asíntota vertical: $x = 0 \Rightarrow$ Posición de la curva:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$
- Asíntota horizontal: $y = 0 \Rightarrow$ Posición de la curva:

$$\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, & y < 0 \\ \text{Si } x \rightarrow +\infty, & y > 0 \end{cases}$$
- La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

EJERCICIO 34 : A partir de la gráfica de $f(x)$:



- ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?
- Di cuáles son sus asíntotas.
- Indica la posición de la curva respecto a las asíntotas verticales.

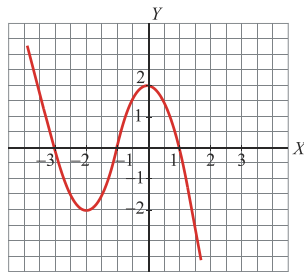
Solución:

- $(0, 0)$
- Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

EJERCICIO 35 : Representa una función polinómica $f(x)$, de la que sabemos que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es 0 en $(-2, -2)$ y en $(0, 2)$.
- Corta a los ejes en $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.

Solución:

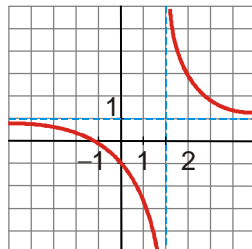


EJERCICIO 36 : Representa una función $f(x)$, de la que sabemos lo siguiente:

- La derivada no se anula en ningún punto.
- La función es decreciente.
- Corta a los ejes en $(-1, 0)$ y en $(0, -1)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$. Además:

$$\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < 1 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y > 1 \end{cases}$$

Solución:



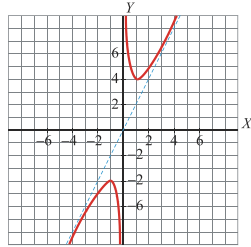
EJERCICIO 37 : Representa gráficamente una función $f(x)$, de la que conocemos lo siguiente :

- Su derivada se anula en $(-1, -4)$ y en $(1, 4)$.
- No corta a los ejes.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

- Tiene una asíntota oblicua, que es $y = 2x$. Además:

$$\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, & \text{la curva está por debajo de la asíntota.} \\ \text{Si } x \rightarrow +\infty, & \text{la curva está por encima de la asíntota.} \end{cases}$$

Solución:



EJERCICIO 38 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = x^3 + 3x^2$

Solución:

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con los ejes:

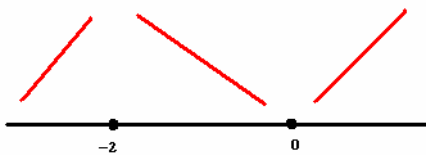
$$\text{Con el eje } X \rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,0) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punto } (-2, 4) \end{cases}$$

$$\text{Con el eje } Y: x = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$$

- Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2) = -\infty$

- Monotonía y extremos:
 $D(f) = \mathbb{R}$

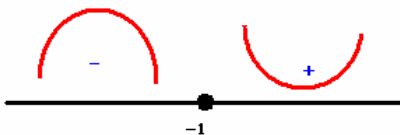
$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,0) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punto } (-2, 4) \end{cases} \end{cases}$$



Creciente: $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$
Decreciente: $(-2, 0)$
Máximo: $(-2, 4)$
Mínimo: $(0, 0)$

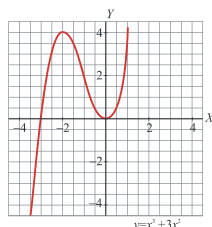
- Curvatura y puntos de inflexión:
 $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$



Cóncava: $(-\infty, -1)$
Convexa: $(-1, \infty)$
Punto de Inflexión: $(-1, 2)$

- Gráfica:



EJERCICIO 39 : Estudia y representa la función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Solución:

- Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con los ejes:

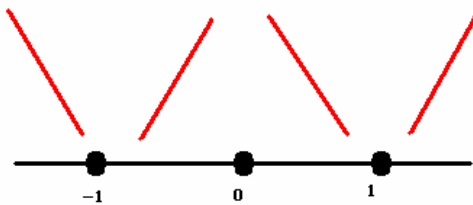
$$\text{Con el eje } X \rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \rightarrow \text{Punto } (-\sqrt{2}, 0) \\ x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = \sqrt{2} \rightarrow \text{Punto } (\sqrt{2}, 0) \end{cases}$$

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,0)$$

- Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty$

- Monotonía y extremos:
 $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$



Creciente: $(-1,0) \cup (1,+\infty)$
Decreciente: $(-\infty,-1) \cup (0,1)$
Máximo: $(0,0)$
Mínimo: $(-1,-1), (1,-1)$

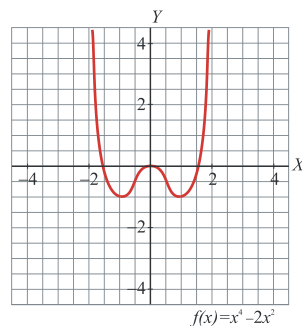
- Curvatura y puntos de inflexión:
 $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} D(f'') = \mathbb{R} \\ f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1/3} \end{cases}$$



Cóncava: $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
Convexa: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$
Punto de Inflexión: $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{5}{9}\right)$

- Gráfica:



EJERCICIO 40 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{2\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{3x}{x-2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- Asíntota vertical: $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x-2} = 3, \text{ con } y > 3$$

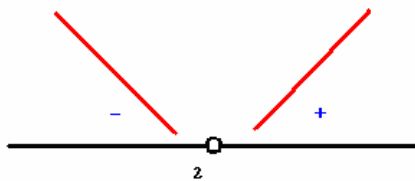
Asíntota horizontal: $y = 3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x-2} = 3, \text{ con } y < 3$$

- Monotonía y extremos:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{3(x-2) - 3x}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} - \{2\} \\ f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow -6 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$



Creciente: $(0, \infty)$

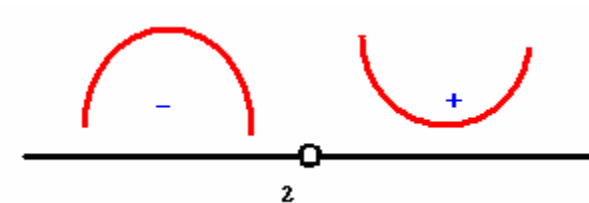
Decreciente: $(-\infty, 0)$

No existe ni máximo ni mínimo

- Curvatura y puntos de inflexión:

$$D(f) = D(f') = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-2)^2 - (-6) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{12}{(x-2)^3} \Rightarrow \begin{cases} D(f'') = \mathbb{R} - \{2\} \\ f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{12}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

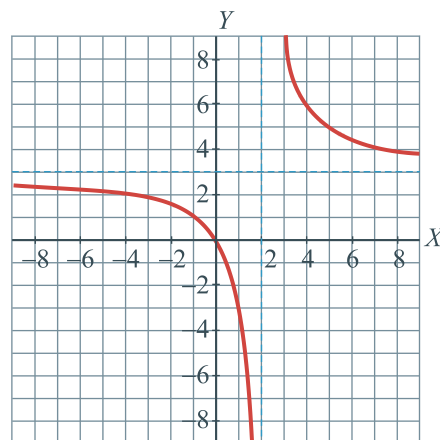


Cóncava: $(-\infty, 0)$

Convexa: $(0, +\infty)$

Punto de Inflexión: No existe

- Gráfica:



$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

EJERCICIO 41 : Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos

que consideres más relevantes: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- Asíntotas verticales: $x = -1$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow$ No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

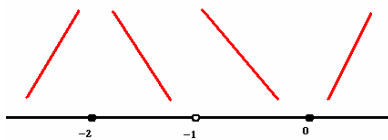
$$\left\{ \begin{array}{l} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1 \\ n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = \frac{-1}{1} = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > A \sin t(100) \\ f(-100) < A \sin t(-100) \end{cases}$$

- Monotonía y extremos:

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} - \{-1\} \\ f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \end{cases}$$



Creciente: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Decreciente: $(-2, -1) \cup (-1, 0)$

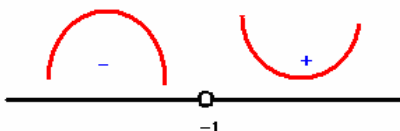
Máximo $(-2, -4)$ y Mínimo $(0, 0)$

- Curvatura y puntos de inflexión:

$D(f) = D(f') = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f''(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x+1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2) \cdot (x+1) - (x^2+2x) \cdot 2}{(x+1)^3} = \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D(f'') = \mathbb{R} - \{-1\} \\ f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

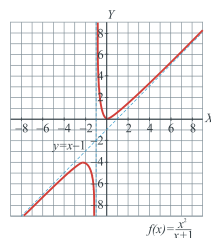


Cóncava: $(-\infty, -1)$

Convexa: $(-1, +\infty)$

Punto de Inflexión: No existe

- Gráfica:



EJERCICIO 42 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{2\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x-2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

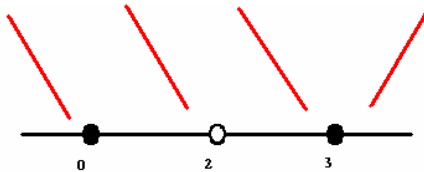
- Asíntota vertical: $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el grado del denominador). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- Monotonía y extremos:

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} D(f') = \mathbb{R} - \{2\} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$



Creciente: $(3, +\infty)$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (3, +\infty)$

Mínimo: $(3, 27)$

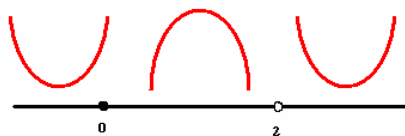
- Curvatura y puntos de inflexión:

$D(f) = D(f') = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 12x)(x-2)^2 - (2x^3 - 6x^2)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(6x^2 - 12x)(x-2) - (2x^3 - 6x^2)2}{(x-2)^3} =$$

$$\frac{6x^3 - 12x^2 - 12x^2 + 24x - 4x - 2x^3 + 12x^2}{(x-2)^3} = \frac{4x^3 - 12x^2 + 20x}{(x-2)^3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} D(f'') = \mathbb{R} - \{2\} \\ f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^3 - 12x^2 + 20x}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow \text{Notiene solución} \end{cases} \end{cases}$$

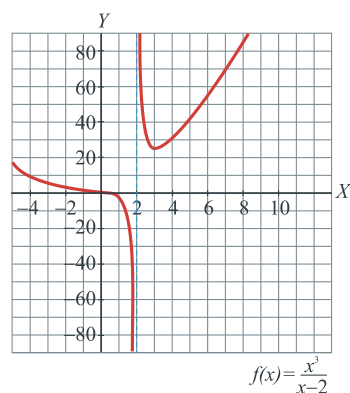


Cóncava: $(0, 2)$

Convexa: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Punto de Inflexión: $(0, 0)$

- Gráfica:

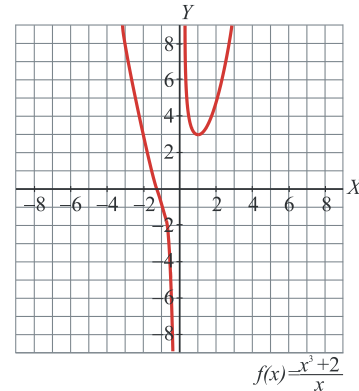


EJERCICIO 43 : Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes: $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{0\}$
- Puntos de corte con los ejes: $(-1,26;0)$
- Asíntota vertical: $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- Rama parabólica: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Monotonía y extremos:
 - Creciente $(1, +\infty)$
 - Decreciente $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
 - Mínimo $(1, 3)$
- Curvatura y puntos de inflexión
 - Cóncava: $(-1, 26; 0)$
 - Convexa: $(-\infty; -1, 26) \cup (0, +\infty)$
 - Punto de inflexión: $(-1, 26; 0)$

• Gráfica:

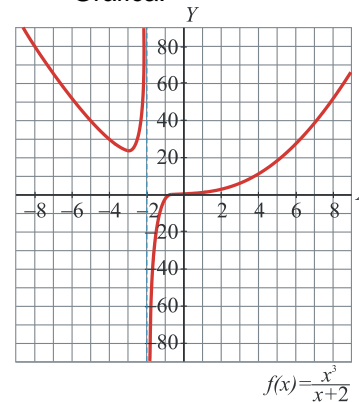


EJERCICIO 44 : Estudia y representa la función: $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{-2\}$
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntota vertical: $x = -2$ $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$
- Rama parabólica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Monotonía y extremos:
 - Creciente $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$
 - Decreciente $(-\infty, -3)$
 - Mínimo $(-3, 27)$
- Curvatura y puntos de inflexión: a un número entre -2 y 0
 - Cóncava: $(-2, a)$
 - Convexa: $(-\infty; -2) \cup (a, +\infty)$
 - Punto de inflexión: $(a, f(a))$

• Gráfica:

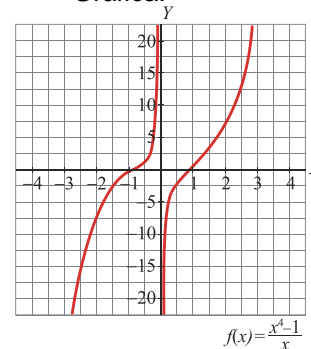


EJERCICIO 45 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x}$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{0\}$
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$ y $(-1,0)$
- Asíntota vertical: $x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
- Rama infinitas: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- Monotonía y extremos:
 - Creciente $\mathbf{R} - \{0\}$
- Curvatura y puntos de inflexión:
 - Cóncava: $(-\infty; -0,58) \cup (0; 0,58)$
 - Convexa: $(-0,58; 0) \cup (0, +\infty)$
 - Punto de inflexión: $(-0,58; 1,54)$ y $(0,58; -1,54)$

• Gráfica:

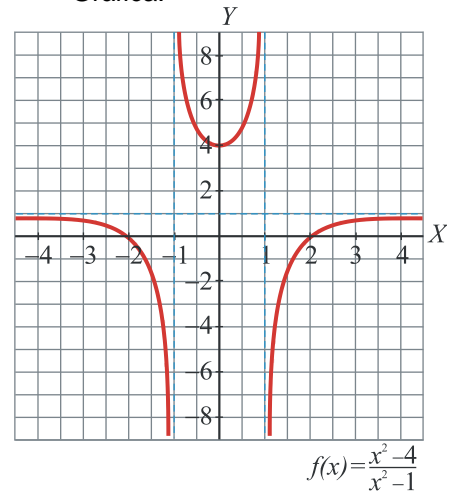


EJERCICIO 46 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$
 $x = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$
 $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
- Asíntota horizontal: $y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 1 \\ f(-100) < 1 \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
Creciente $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
Decreciente $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
Máximo: (0,4)
- Curvatura y puntos de inflexión:
Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Convexa: $(-1, 1)$
Punto de inflexión: No existen

• Gráfica:

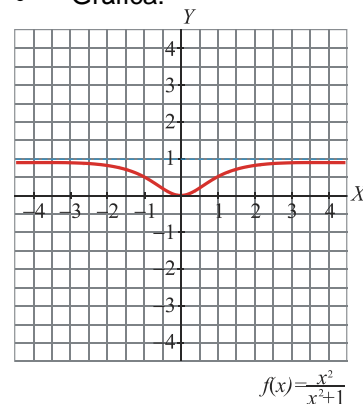


EJERCICIO 47 : Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Solución:

- Dominio = \mathbb{R}
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- No tiene asíntotas verticales.
Asíntota horizontal: $y = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(100) < 1 \\ f(-100) < 1 \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
Creciente $(0, +\infty)$
Decreciente $(-\infty, 0)$
Mínimo: (0,0)
- Curvatura y puntos de inflexión:
Cóncava: $(-\infty; -0,58) \cup (0,58; +\infty)$
Convexa: $(-0,58; 0,58)$
Punto de inflexión: $(-0,58; 0,25)$ y $(0,58; 0,25)$

• Gráfica:

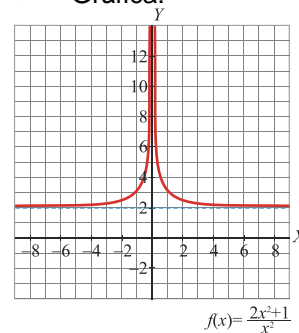


EJERCICIO 48 : Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$ estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$
- Puntos de corte con los ejes: No existen
- Asíntota vertical: $x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- Asíntota horizontal: $y = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > 2 \\ f(-100) > 2 \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
Creciente $(-\infty, 0)$
Decreciente $(0, +\infty)$
Máximo y Mínimo: No existen
- Curvatura y puntos de inflexión:
Cóncava: $\mathbb{R} - \{0\}$
Punto de inflexión: No existe

• Gráfica:

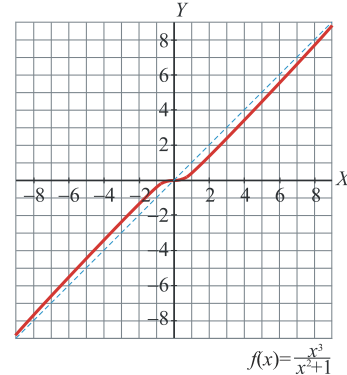


EJERCICIO 49 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

Solución:

- Dominio = \mathbb{R}
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntota vertical: *No tiene*
- Asíntota oblicua: $y = x \Rightarrow \begin{cases} f(100) < A \sin t(100) \\ f(-100) > A \sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
 - Creciente \mathbb{R}
 - Máximo y Mínimo: No existen
- Curvatura y puntos de inflexión:
 - Cóncava: $(-\infty, 0)$
 - Convexa: $(0, +\infty)$
 - Punto de inflexión: (0,0)

• Gráfica:

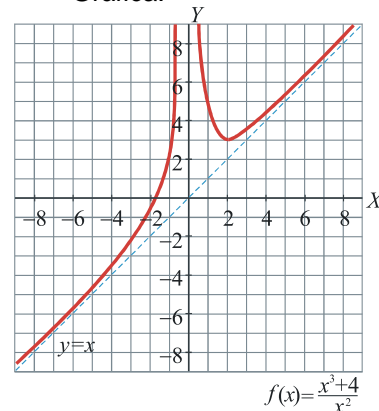


EJERCICIO 50 : Dada la función $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ estudia sus aspectos más relevantes y representala gráficamente.

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$
- Puntos de corte con los ejes: (-1,6;0)
- Asíntota vertical: $x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- Asíntota oblicua: $y = x \Rightarrow \begin{cases} f(100) > A \sin t(100) \\ f(-100) > A \sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
 - Creciente $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente: (0,2)
 - Mínimo: (2,3)
- Curvatura y puntos de inflexión:
 - Convexa: $\mathbb{R} - \{0\}$
 - Punto de inflexión: No tiene

• Gráfica:

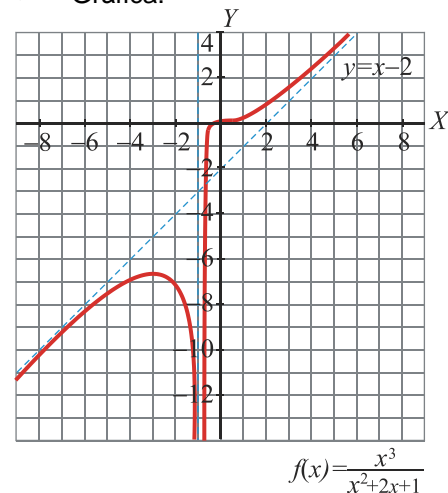


EJERCICIO 51 : Estudia y representa la función: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
- Puntos de corte con los ejes: (0;0)
- Asíntota vertical: $x = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
- Asíntota oblicua: $y = x-2 \Rightarrow \begin{cases} f(100) > A \sin t(100) \\ f(-100) < A \sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
 - Creciente $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$
 - Decreciente: (-3,-1)
 - Máximo: (-3,-27/4)
- Curvatura y puntos de inflexión:
 - Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 - Convexa: (0,+∞)
 - Punto de inflexión: (0,0)

• Gráfica:

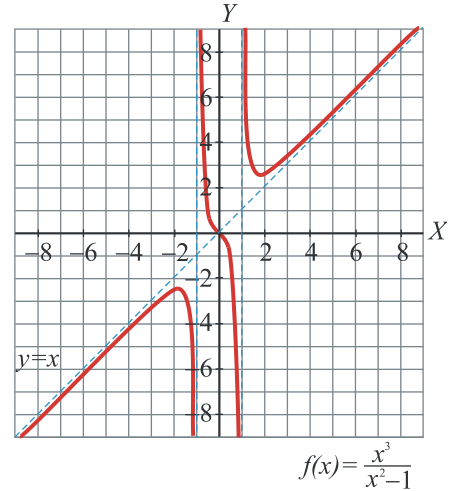


EJERCICIO 52 : Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- Puntos de corte con los ejes: (0;0)
- Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$
 $x = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$
 $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
- Asíntota oblicua: $y = x \Rightarrow \begin{cases} f(100) > A \sin t(100) \\ f(-100) < A \sin t(-100) \end{cases}$
- Monotonía y extremos:
Creciente $(-\infty; -1,73) \cup (1,73; +\infty)$
Decreciente $(-1,73; -1) \cup (-1, 1) \cup (1; 1,73)$
Máximo $(-1,73; -2,6)$
Mínimo $(1,73; 2,6)$
- Curvatura y puntos de inflexión:
Cónca: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
Convexa: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
Punto de inflexión: (0,0)

• Gráfica:

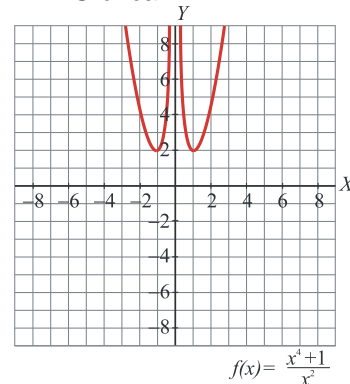


EJERCICIO 53 : Estudia y representa la función: $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución:

- Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$
- Puntos de corte con los ejes: No tiene
- Asíntota vertical: $x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- Rama parabólica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Monotonía y extremos:
Creciente $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
Decreciente $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
Mínimo: $(-1, 2)$ y $(1, 2)$
- Curvatura y puntos de inflexión:
Convexa: $\mathbb{R} - \{0\}$
Punto de inflexión: No tiene

• Gráfica:



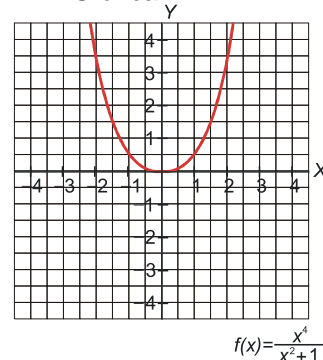
EJERCICIO 54 : Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$$

Solución:

- Dominio = \mathbb{R}
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntotas verticales: No tiene.
Rama parabólica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Monotonía y extremos:
Creciente $(0, +\infty)$
Decreciente $(-\infty, 0)$
Mínimo: (0,0)
- Curvatura y puntos de inflexión:
Convexa: \mathbb{R}
Punto de inflexión: No tiene

• Gráfica:



EJERCICIO 55 :

a) Dibuja la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

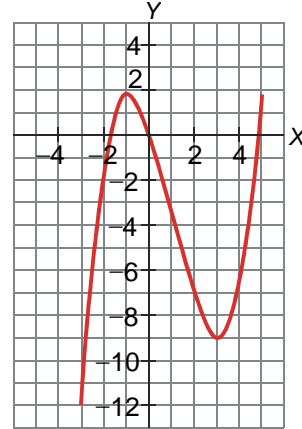
b) Ayúdate de la gráfica para estudiar los siguientes aspectos de $f(x)$: dominio, continuidad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución:

a)

- Dominio = \mathbf{R}
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$, $(4,86;0)$ y $(-1,85;0)$
- Asíntotas verticales: No tiene.
Rama parabólica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- Monotonía y extremos:
Creciente $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
Decreciente $(-1, 3)$
Máximo $(-1, 5/3)$
Mínimo: $(3, -9)$
- Curvatura y puntos de inflexión:
Cóncava: $(-\infty, -1)$
Convexa: $(-1, +\infty)$
Punto de inflexión: $(-1, -11/3)$

• Gráfica:



b) • Dominio = \mathbf{R}

- Es una función continua.
- Creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 3)$.

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.

Tasa de variación media. Cálculo y significado

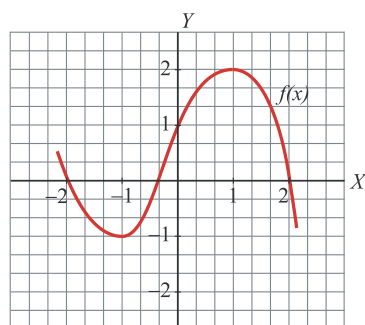
EJERCICIO 1 : Consideramos la función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIO 2 :

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos: a) $[-2, -1]$ b) $[0, 1]$



Derivada de una función por la definición

EJERCICIO 4 : Halla, utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{4}$ d) $f(x) = \frac{3}{x}$

EJERCICIO 5 : Halla la derivada de la siguientes funciones, aplicando la definición de derivada, en los puntos que se indican

a) $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ en $x = -1$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$ c) $f(x) = 3x^2 + 2x$ en $x = 1$ d) $f(x) = \frac{x^2}{3}$ en $x = 1$

Cálculo de derivadas

EJERCICIO 6 : Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = 5$

2) $y = x$

3) $y = 3x$

4) $y = x^5$

5) $y = 3 \cdot x^6$

6) $y = \frac{3}{5} \cdot x^{10}$

7) $y = \frac{3x^2}{4}$

8) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$

9) $y = \frac{1}{x^4}$

10) $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + x^{-2} \right)$

11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$

12) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 8x$

13) $y = \frac{1}{x^2} + x^3 + 2 \cdot x^{-1}$

14) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$

15) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3}$

16) $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x}$

17) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 3x)$

18) $y = (x^2 - 1) / (x^3 + 3x)$

19) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$

20) $y = \frac{1}{x}$

21) $y = \frac{x^2 - x + 3}{5}$

22) $y = x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{3x}{1+x} + \frac{4-x}{x}$

23) $y = (x^3 + 1) \cdot (x + 2)$

24) $y = (x^3 + 2) \cdot x^{-2}$

25) $y = \frac{2}{x^3 + 2}$

26) $y = \frac{x^3 - 3}{5}$

27) $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$

$$28) y = \frac{1}{1-3x^3}$$

$$29) y = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 3x^2}$$

$$30) y = \frac{x^3}{x-3}$$

$$31) y = (3x^3 - 2x + 7)^7$$

$$32) y = 3 \cdot (x^2 - x + 1)^3$$

$$33) y = (2x^4 - 4x^2 - 3)^5$$

$$34) y = (2x^3 + x)^4$$

$$35) y = 5 \cdot (x^3 - 3x)^4$$

$$36) y = \frac{(x^4 - 5x)^2}{(x^3 - 3x)^5}$$

$$37) y = \frac{(x^3 - 2x)^3 \cdot (2x^4 - x^2)^2}{(x^3 - 2x)^3}$$

$$38) y = \frac{(2x^4 - x^2)^2}{(2x^4 - x^2)^2}$$

$$39) y = \sqrt[3]{x}$$

$$40) y = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$41) y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$42) y = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$$

$$43) y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$44) y = \sqrt[5]{x^3 - 7x}$$

$$45) y = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}$$

$$46) y = 5x^3 + \sqrt[3]{x} + 1$$

$$47) y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$48) y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$$

$$49) y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$$

$$50) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$51) y = 5 \cdot (x^3 - 2x^2 + x)^4$$

$$52) y = \frac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$$

$$53) y = e^{\sqrt{x}}$$

$$54) y = \frac{1}{e^{2x}}$$

$$55) y = x^2 \cdot e^{3x}$$

$$56) y = \frac{x}{e^x}$$

$$57) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$58) y = \frac{x^2 - x}{e^x}$$

$$59) y = \log_3 x$$

$$60) y = \log_2 x^3$$

$$61) y = \log x$$

$$62) y = \text{Ln}(x^2 - 1)$$

$$63) y = \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$$

$$64) y = \text{Ln} \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$$

$$65) y = \log \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$$

$$66) y = \frac{\text{Lnx}}{x^5}$$

$$67) y = \text{Ln}[x^3 \cdot (x+2)]$$

$$68) y = \text{Ln} \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$69) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$70) y = \text{Ln} \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$71) y = (\log x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

$$72) y = \text{tag } 2x$$

$$73) y = \text{sen } 2x$$

$$74) y = \text{sen } x^2$$

$$75) y = \text{sen}^2 x$$

$$76) y = \text{sen}^2 2x$$

$$77) y = \text{sen}^2 x^2$$

$$78) y = \text{sen}^5 2x^3$$

$$79) y = 5 \cdot \text{sen}^3 2x^4$$

$$80) y = e^{\cos x}$$

$$81) y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$$82) y = \frac{\sqrt{1+\text{sen } x}}{\sqrt{1-\text{sen } x}}$$

$$83) y = \text{tag}(x+3)^2$$

$$84) y = \text{tag}^2(x+3)$$

$$85) y = \text{Ln} \left(\cos \frac{x^2}{2} \right)$$

$$86) y = \text{tag}(1-2x)$$

$$87) y = \text{tag} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$88) y = \frac{\cos \text{ec } x}{\sec x}$$

$$89) y = \text{sen} \sqrt{x}$$

$$90) y = \text{sen}(x + e^x)$$

$$91) y = \text{Ln} \left[\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \right]$$

$$92) y = \cos x \cdot (1 - \cos x)$$

$$93) y = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x}$$

$$94) y = \text{Ln}(x^2 \cdot \text{sen } 2x)$$

$$95) y = \frac{x \cdot \text{sen}^2 x}{e^x - 1}$$

$$96) y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$97) y = \frac{-\cos 2x}{2}$$

$$98) y = \text{Ln}(\text{tag } 2x)$$

$$99) y = \text{Ln}(\text{sen } x)$$

$$100) y = \text{sen}^3(x+1)$$

$$101) y = \sec^2 x$$

$$102) y = \sqrt{x} \text{sen} \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$$

$$103) y = \text{sen}[\cos(\text{tag } x)]$$

$$104) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

$$105) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$106) y = \text{Ln}(\text{tag}^2 \sqrt{x})$$

$$107) y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$108) y = \text{Ln} \frac{(x-1)^2}{2x-3}$$

$$109) y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x)$$

$$110) y = e^{\cos 2x}$$

$$111) y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x \cdot \cos^3 x)$$

$$112) y = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$$

$$113) y = \text{sen}(x+1)^3$$

EJERCICIO 7 - Halla la función derivada de:

$$a) y = 3x^5 - 4x^3 + 3x + 7$$

$$b) y = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 5x - 15$$

$$c) y = \frac{x^2 - 3x + 7}{5}$$

$$d) y = (3x^3 - 5x + 1) \cdot (x + x^2)$$

$$e) y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

$$f) y = \frac{x^3}{3x+2}$$

$$g) y = \left(\frac{3x-2}{7-9x} \right)^2$$

$$h) y = \frac{(5-x)^2}{3x-1}$$

$$i) y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

$$j) y = \sqrt{x^9} \cdot 4x^5$$

$$k) y = \frac{2}{x^5} + \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{l) } y = \sqrt{12x} + e^{2x+1} + \log_2 3x & \text{m) } y = (3x - 1)^2 \cdot (1 - 4x) & \text{n) } y = \frac{x^5 \sqrt{x}}{x^{-3}(x^2)^5} & \text{ñ) } y = (3x^3 - 5x + 2)^4 \\
 \text{o) } y = (3x^2 - x)^4 & \text{p) } y = \sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}} & \text{q) } y = \sqrt{1-x^2} & \text{r) } y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 \\
 \text{s) } y = (2x - 4)^4 + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} & \text{t) } y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} & \text{u) } y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} & \text{v) } y = \text{Ln}(x^2 + 2x) + e^{-x} \\
 \text{w) } y = \log_3 x + 3^x & \text{x) } y = 2 \cdot \text{sen}(3x+4) & \text{y) } y = 3\cos^3(3x) & \text{z) } y = \text{tag}(x^2+1) \\
 \text{1) } y = \sqrt[5]{x^3 - x} & \text{2) } y = x \cdot e^x & \text{3) } y = \frac{\text{Lnx}}{\text{sen}x} & \text{4) } y = 4 \cdot (2x^3 - 1)^5 \\
 \text{5) } y = e^{\sqrt{x+3}} & \text{6) } y = \sqrt[3]{\text{Ln}(3x+5)} & \text{7) } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{8) } y = \text{tag} \sqrt{3x+2}
 \end{array}$$

Recta tangente

EJERCICIO 8 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 9 - Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

EJERCICIO 10 - Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

EJERCICIO 11 - Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$

EJERCICIO 12 - Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$

EJERCICIO 13 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x - 4x^2$ que sea paralela a la recta $y = -7x + 3$

EJERCICIO 14 - Halla la ecuación de la recta de pendiente -4 que sea tangente a la curva $y = x^4 + 2$.

EJERCICIO 15 - Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 + x$ en el punto de abscisa $x = -1$

Crecimiento y extremos relativos

EJERCICIO 16 - Estudia la monotonía y calcula los extremos de la siguiente función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Representar funciones que cumplan unas condiciones

EJERCICIO 17 : Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

- Su derivada se anula en $(0, 0)$
- Solo corta a los ejes en $(0, 0)$
- Sus asíntotas son $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$
- La posición de la curva respecto a las asíntotas es: $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < 0 \\ \text{Si } x \rightarrow +\infty, y < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

EJERCICIO 18 : Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que :

- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada se anula en $(-3, -2)$, en $(0, 2)$ y en $(2, -3)$.
- Corta a los ejes en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 2)$.

EJERCICIO 24 :

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.
b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 25 : Consideramos la función: $f(x) = 5x^2 - 3x$

- a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?
b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 26 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = 8x - x^2$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$

EJERCICIO 27 : Dada la siguiente función: $f(x) = 14x - 7x^2$

- a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$?
b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 28 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

EJERCICIO 29 : Averigua los puntos de tangente horizontal de las siguiente función y represéntalos gráficamente:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

EJERCICIO 30 : Estudia y representa las siguientes funciones:

- | | | | |
|--|---------------------------------------|--|---|
| a) $f(x) = (x-1)^2(x+8)$ | b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ | c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ | d) $f(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2$ |
| e) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ | f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ | g) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ | h) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}$ |
| i) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ | j) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$ | k) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ | l) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ |
| m) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$ | n) $f(x) = x(x-3)^2$ | ñ) $f(x) = x^4 - 8x^2$ | o) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 4}$ |
| p) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ | q) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$ | r) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}$ | s) $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$ |