ALGEBRA LINEAL – 2º de BACHILLERATO – MATEMATICAS CyT - SOLUCIÓN	Fecha: 13 abril 2015 – 2ºB

1.

a) Utilizando la definición dada, las matrices serían: $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1-t & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -2 & 1-t & -\frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 1-t \end{pmatrix} \rightarrow |M| = (1-t)^3 + 1 + 1 - (1-t) - (1-t) - (1-t) = \boldsymbol{t^2 \cdot (3-t)}$

Por tanto, **existe la matriz inversa $\forall t \in \Re - \{0, 3\}$**

c) Haciendo operaciones, resulta: $\cancel{A} - 2\,B\bullet A = \cancel{A} + B\bullet X\bullet B \rightarrow -2\,B\bullet A = B\bullet X\bullet B \rightarrow -2\,B^{-1}\bullet B\bullet A = B^{-1}\bullet B\bullet X\bullet B \rightarrow$ $-2\,A = X\bullet B \rightarrow -2\,A\bullet B^{-1} = X\bullet B\bullet B^{-1} \rightarrow \mathbf{-2\,A\bullet B^{-1} = X}$

Vamos a calcular la matriz B^{-1}: $|B| = 1$

$\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow -2 \,.\, A \,.\, B^{-1} = \mathbf{-2}. \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{4} & -\mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{2}} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{17} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-34} & \mathbf{16} \end{pmatrix}}$

---

2. Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I - 2A$, donde I denota la matriz identidad.

a) $A^2 = I - 2A \rightarrow A^2 + 2A = I \rightarrow A\bullet(A + 2I) = I \rightarrow |A\bullet(A+2I)| = |I| \rightarrow |A| \,.\, |(A+2I)| = 1 \rightarrow |A| \neq 0$

Como tenemos que $A\bullet(A + 2I) = I \rightarrow \mathbf{A^{-1} = A + 2\,I}$

b) $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (I-2A)\cdot(I-2A) = I - 4A + 4A^2 = I - 4A + 4(I-2A) = 5I - 12A = p \cdot I + q \cdot A$

Entonces: $p = 5$ y $q = -12$

c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix}$

$I - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix}$

Entonces: $\begin{cases} -2+k = -2 \\ 1+k^2 = 1-2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 + 2k = 0 \rightarrow k = 0 \vee k = -2 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{k = 0}$

---

3. Sea una matriz cuadrada C de orden 2, **ortogonal** y sabiendo que $c_{11} = ½$ y $|C| < 0$

b) Sea $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{pmatrix}$. Entonces: $|C| = \frac{z}{2} - xy = -1 \rightarrow \mathbf{z - 2xy + 2 = 0}$ **(*)**

Por otro lado, como C es ortogonal $\Rightarrow C^{-1} = C^t \rightarrow \begin{pmatrix} -z & x \\ y & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ x = y \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación (*), resulta: $-\frac{1}{2} - 2x^2 + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow \mathbf{x} = \pm\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

Por tanto, las soluciones son: $\boxed{\mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \\ \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C_2} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \\ -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}}$

4. Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix}1 & k\\ k & 1\\ k & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-y\\ k\\ k+1+x\end{pmatrix}-z\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix}x+ky\\ kx+y\\ kx-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-y\\ k\\ k+1+x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2z\\ z\\ -z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-y-2z\\ k-z\\ k+1+x+z\end{pmatrix}\to\begin{cases}x+ky=-1-y-2z\\ kx+y=k-z\\ kx-2y=k+1+x+z\end{cases}\to\begin{cases}x+(k+1)\cdot y+2z=-1\\ kx+y+z=k\\ (k-1)\cdot x-2y-z=k+1\end{cases}$

b) $\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\overbrace{\begin{matrix}1 & k+1 & 2\\ k & 1 & 1\\ k-1 & -2 & -1\end{matrix}}^{A} & \begin{matrix}-1\\ k\\ k+1\end{matrix}\end{array}\right)}_{AM}\to\ |A|=2k^2-5k+2=0\to k=2\vee\ k=\frac{1}{2}$

$Si\ k=2\ \to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 3\end{array}\right)\to rg(A)=2$ pues $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0$ y $rg(AM)=2$ pues 3F = 2F – 1F

$Si\ k=\frac{1}{2}\ \to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{3}{2} & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2}\end{array}\right)\to\begin{cases}rg(A)=2\,pues\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0\\ rg(AM)=3\,pues\ \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & 2 & -1\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ -2 & -1 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=-3\neq 0\end{cases}$. Entonces:

$$\begin{cases}\mathbf{Si\ k\ \neq 2\,,\ \frac{1}{2}\to rg(A)=rg(AM)=3,\quad n=3\ \to Compatible\ Determinado}\\ \mathbf{Si\ k=2\ \to rg(A)=2\ ,\ rg(AM)=2,\quad n=3\ \to Compatible\ Indeterminado}\ ,\mathbf{1\ g.l.}\\ \mathbf{Si\ k=\ \frac{1}{2}\to rg(A)=2\ ,\ rg(AM)=3\ \to Incompatible}\end{cases}$$

c) Infinitas soluciones: k = 2 ➔ $\begin{cases}x+3y+2z=-1\\ 2x+y+z=2\\ x-2y-z=3\end{cases}\to\begin{cases}x+3y=-1-2z\\ 2x+y=\ 2-z\\ z=t\end{cases}\to\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2t\\ 2-t\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1-2t\\ 2-t\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1-2t\\ 2-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7-t}{5}\\ \frac{-3t-4}{5}\end{pmatrix}$$

Es decir: $\begin{cases}\mathbf{x=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\,t}\\ \mathbf{y=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,t}\\ \mathbf{z=t}\end{cases}$, $\mathbf{\forall t\in R}\ \to\mathbf{(x,y,z)=\left(\frac{7}{5}\,,-\frac{4}{5},0\right)+\left(-\frac{1}{5}\,,-\frac{3}{5},1\right)\cdot t=\left(\frac{7}{5}\,,-\frac{4}{5},0\right)+(1,3,-5)\cdot t}$

---

5. *a)* **m = mañanas lluviosas ; t = tardes lluviosas ; d = días de vacaciones**

$$\begin{cases}m+6=d\\ t+5=d\\ m+t=7\end{cases}\to\begin{cases}x\quad -d=-6\\ t-d=-5\\ m+t\ =\ 7\end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0\,,n=3\ \to Sistema\ de\ Cramer\ \ \to d=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -5\\ 1 & 1 & 7\end{vmatrix}}{2}=\frac{18}{2}=$ **9 días**